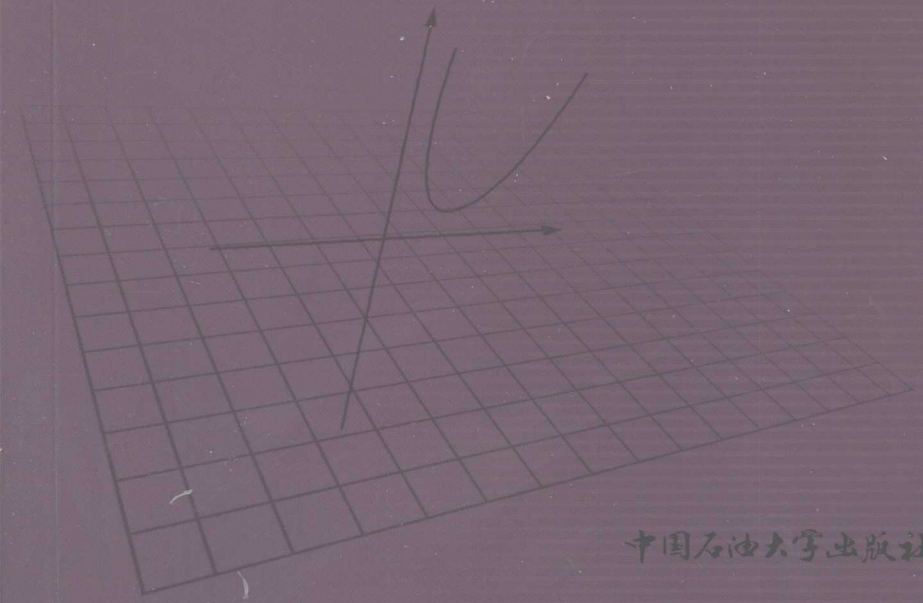
函数方程引论

李文荣　张全信　田家财　编著



中国石油大学出版社

责任编辑：高　颖
封面设计：九天设计

函数方程引论

ISBN 978-7-5636-2572-7
9 787563 625727 >
定价：15.00元

滨州学院教材出版基金资助

函数方程引论

李文荣 张全信 田家财 编 著

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

函数方程引论/李文荣,张全信,田家财编著.—东营:
中国石油大学出版社,2008.4
ISBN 978-7-5636-2572-7

Ⅰ.函… Ⅱ.①李…②张…③田… Ⅲ.泛函方程 Ⅳ.
O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 052106 号

书　　名:函数方程引论
作　　者:李文荣　张全信　田家财

责任编辑:高　颖(电话　0546—8393394)
封面设计:九天设计

出 版 者:中国石油大学出版社(山东 东营　邮编 257061)
网　　址:http://www.uppbook.com.cn
电子信箱:shiyoujiaoyu@126.com
印 刷 者:青岛星球印刷有限公司
发 行 者:中国石油大学出版社(电话　0546—8392791,8392563)
开　　本:140×202　印张:4.5　字数:111 千字
版　　次:2008 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价:15.00 元

内容提要

本书是一本关于函数方程理论的入门书，主要论述单变量函数方程问题. 本书在阐述函数方程的概念、分类和解的基础上，介绍了函数方程的若干种解法，并进一步论述了某些函数方程的非负解、单调解、凸解、连续解、C^r类解和解析解，其中还涉及某些迭代函数方程解析解的存在唯一性问题，最后从几个侧面展示了函数方程的巧妙应用. 本书可作为高等学校有关专业学生的课外读物，也可作为各类数学竞赛的参考书.

PREFACE 前言

顾名思义，函数方程是一类这样的方程，其中作为未知的不是数，而是函数．然而，现代函数方程已不再包括微分方程、积分方程与算子方程等．函数方程的本质特征是它的解完全依赖于某个函数类，可分别讨论函数方程的连续解、可微解、解析解、单调解和凸函数解等．与微分方程有相似之处，人们最早也是致力于寻找函数方程的某些解，后来才逐步转向研究函数方程的解的存在性、唯一性和稳定性的．由于函数方程的求解涉及许多数学技巧，所以函数方程问题常常被编入数学竞赛题中，受到数学教育界的关注．

函数方程理论是一个历史悠久、内容丰富、应用广泛的重要数学分支，有许多大数学家涉猎这个领域，但终因函数方程理论异常复杂，所以200多年来发展缓慢．尽管已经发表过有关论著数千种，但未建立起系统的理论基础，只是到了近半个世纪，人们发现函数方程在数学的许多分支和自然科学乃至社会科学的许多领域都有重要的应用，函数方程理论才有了长足的发展．特别是近年来，迭代函数方程理论方兴未艾，使得函数方程在动力系统、混沌理论诸新兴学科中发挥了重要作用．与此同时，研究函数方程理论的波兰学派、加拿大学派、美国学派、俄罗斯学派等应运而生，呈现了函数方程理论研究的活跃局面．

作　者

2008年1月

CONTENTS 目录

第 1 章　函数方程的概念、分类和解 …… 1
§ 1.1　函数方程的概念 …… 1
§ 1.2　函数方程的分类 …… 3
§ 1.3　函数方程的解 …… 4
§ 1.4　函数方程解的存在唯一性 …… 5
第 2 章　函数方程的初等解法 …… 7
§ 2.1　代换法 …… 7
§ 2.2　赋值法 …… 9
§ 2.3　归纳法 …… 13
§ 2.4　柯西法 …… 18
§ 2.5　微分法 …… 22
§ 2.6　幂级数法 …… 32
§ 2.7　其他方法 …… 37
第 3 章　函数方程解的存在性 …… 41
§ 3.1　非负解 …… 41
§ 3.2　单调解 …… 43
*§ 3.3　凸解 …… 44
§ 3.4　连续解 …… 48
*§ 3.5　C^r 类解 …… 55
§ 3.6　解析解 …… 57
第 4 章　函数方程的应用 …… 99
§ 4.1　定义各种函数 …… 99

§4.2 揭示函数性质 …… 107
§4.3 进行某些推导和运算 …… 120
§4.4 更多方面的应用 …… 130
参考文献 …… 134

第1章 函数方程的概念、分类和解

§1.1 函数方程的概念

函数方程理论是一个历史悠久、内容丰富、应用广泛的数学分支.

在一段相当长的时间内,函数方程被认为是含有未知函数的等式.也就是说,这类方程中未知的是函数.但是,目前已很少以这种方式来定义函数方程了,因为按此种定义,函数方程包括的范围过于庞大,就连已成为数学独立分支的微分方程、积分方程及算子方程等都被包括在函数方程之中了.

20世纪中叶以来,一种由J. Aczél等给出的所谓函数方程的现代定义得到了普遍的认可.这种定义规定:函数方程两端的表示式是由有限个(包括已知的和未知的)函数与变数的有限次迭加所构成的.从这个意义上讲,函数方程不包括那些对未知函数施行无穷小运算的方程.不言而喻,微分方程、积分方程等都不是现代意义上的函数方程.下列方程是函数方程的典型例子:

Cauchy 函数方程 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$等,

Gamma 函数方程 $\varphi(x+1)=x\varphi(x)$,

Schröder 函数方程 $\varphi[f(x)]=s\varphi(x)$,

Abel 函数方程 $\varphi[f(x)]=\varphi(x)+c, c\neq 0$,

Babbage 函数方程 $\varphi^n(x)=x$.

这里,$\varphi^n(x)$表示 $\varphi(x)$的 n 次迭代;$\varphi(x)$表示未知函数.

函数方程有两个重要特征:其一是在哪个集合上讨论函数方

程，它的解就完全依赖于哪个集合，例如 Cauchy 函数方程 $\varphi(xy)=\varphi(x)+\varphi(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有唯一的解 $\varphi(x)\equiv 0$，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上还有解 $\varphi(x)\equiv c\ln|x|$（c 为常数）；其二是在哪个函数类中讨论解的个数或解的性态，它的解就强烈地依赖于哪个函数类，例如 $\varphi(x)\equiv c\ln|x|$ 是所述方程在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的连续解，但该方程在同样的集合上还有不连续解.

函数方程的这些特性决定了它与其他方程有着本质的差异. 譬如，在微分方程中就不出现类似上述的现象，因为微分方程中待求的未知函数通常要受到可微性条件的约束. 另外，由于函数方程中不含未知函数的微分或积分，所以不能求助于直观的几何意义，这就给函数方程的研究带来极大的困难.

函数方程的出现可以追溯到 Archimedes 时代，而后的数学家 d'Alembert，Euler，Lagrange，Cauchy，Weierstrass，Hardy 等都十分关注函数方程的进展. 由于函数方程理论异常复杂和困难，所以从 18 世纪到 20 世纪的 200 多年间发展缓慢，步履维艰. 其间虽然产生了数以千计的文献，取得了许多有价值的理论成果与应用成果，但并未建立起系统的理论基础. 直到 20 世纪 20 年代，特别是近 30 年来，人们发现函数方程在数学的各分支和自然科学乃至社会科学的许多领域都有意想不到的、巧妙的应用，函数方程理论才有了较大的发展，对若干函数方程的连续解、可微解、解析解、凸解、单调解、可测解、可积解的构造方法、存在性、唯一性、渐近性以及稳定性等都获得了一大批有深刻意义的结果，并大大地拓展了函数方程的应用范围和深度. 函数方程在微分方程、算子方程、概率论、数学规划、信息论、动力系统、fractal 几何、群论、空气动力学、图论、量子场论以及经济与决策领域中都起着重要的作用. 关于函数方程方面的工作可参考 J. Aczél 和 M. Kuczma 等的专著.

§1.2 函数方程的分类

由于函数方程异常复杂，所以对它进行分类是相当困难的，通常有以下几种分类方法：

(1) 按元分. 函数方程中未知的函数自变量有 n 个，就称该函数方程是 n 元的，如 Cauchy 函数方程属于多元函数方程(或多变量方程)，Gamma 函数方程属于一元函数方程(或单变量函数方程).

(2) 按未知函数的个数分. 上节所列的函数方程都是含有一个未知函数的函数方程，而方程

$$F(x+y)G(x-y) = H(x) + I(y)$$

是含有四个未知函数 F, G, H 和 I 的函数方程.

(3) 单变量函数方程又可分为不含未知函数迭代的方程和含有未知函数迭代的方程，其一般形式可分别写成

$$F[x, \varphi(x), \varphi(f_1(x)), \cdots, \varphi(f_n(x))] = 0 \tag{1.2.1}$$

和

$$F[x, \varphi^{n_1}(x), \varphi^{n_2}(x), \cdots, \varphi^{n_m}(x)] = 0. \tag{1.2.2}$$

这两种方程差异极大. 对于方程(1.2.1)的研究较为深入，而关于方程(1.2.2)的结果却寥若晨星，只是在近年来才有较大的进展. 在方程(1.2.1)与(1.2.2)中，$\varphi(x)$ 是未知函数；$F, f_1, \cdots, f_n$ 是已知函数；$\varphi^{n_i}(x)$ 是 φ 的 $n_i (i=1, \cdots, m)$ 次迭代. 当 $f_i(x) = f^i(x)$ $(i=1, \cdots, n)$ 时，便得到方程(1.2.1)的重要的特殊形式：

$$F[x, \varphi(x), \varphi(f(x)), \varphi(f^2(x)), \cdots, \varphi(f^n(x))] = 0. \tag{1.2.3}$$

对于形如(1.2.1)或(1.2.3)的方程，我们定义它的阶为在其中出现的数 n. 例如，方程

$$F[x, \varphi(x), \varphi(f(x))] = 0 \tag{1.2.4}$$

就是一阶的. 前述的 Schröder 函数方程就是一个特殊的一阶方

程. 形如 $F[x,\varphi(x)]=0$ 的零阶方程就是熟知的一个隐函数方程.

另外,前述的 Babbage 函数方程和著名的 Feigeubaum 函数方程 $\varphi[\varphi(x)]=\lambda\varphi(x)$ 就是属于方程(1.2.2)型的含未知函数迭代方程的重要特例.

(4) 对于方程(1.2.1)和(1.2.2),当 F 是线性函数时,方程就称为**线性的**;当 F 是非线性函数时,方程就称为**非线性的**.

从单变量函数方程的研究现状来看,我们认为没有必要引进更详尽的分类,且现在似乎还没有一种令人满意的分类.

§1.3 函数方程的解

对函数方程来说,含有任意常数(或根本不含任意常数)的解称为**特解**,而含有任意函数的解称为**通解**. 例如,方程

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

有仅含任意常数 A 的特解 $f(x)=A\sin x$,也有含有任意函数的通解 $f(x)=\Phi(\sin x)$. 其中,Φ 是任意函数.

顺便指出,函数方程有实函数解与复函数解之分,有时也有常数解,甚至还有明显解(即等于零的解).

在函数方程理论中,寻求方程通解或揭示通解的结构具有重要意义. 1960 年,M. Kuczma 首先在 $f[f(x)]=x$ 的条件下研究了一阶非线性方程

$$\varphi[f(x)]=G[x,\varphi(x)] \tag{1.3.1}$$

的通解. 1965 年,他又得到了关于方程(1.3.1)通解结构的深刻结果,这些结果至今仍很重要.

因为函数方程的通解含有任意函数,所以即便是方程(1.3.1)也有一个巨大的通解族. 在解决具体问题时,这样复杂的通解族处理起来十分棘手,是不可取的. 我们希望找到能确切描述原始问题的解,于是产生了这样的问题:是否存在以某确定的特殊性质为特

征的唯一解(或唯一有穷参数解族)呢？回答是肯定的.也就是说，在一个广泛函数类 Φ 上讨论方程的解是不适宜的，我们可以在更小的函数类 $\Phi^* \subset \Phi$ 上寻找方程的解，譬如取连续函数类、可微函数类、解析函数类、单调函数类及凸函数类等作为上面的 Φ^*. 在 Φ^* 中能否给出方程的唯一解，这取决于方程的形式和假定的条件.

研究单变量函数方程的重要内容之一就是讨论多种方程在不同函数类 Φ^* 中解的构造方法和各种性质.在函数方程的研究中，方程中已知函数的不动点扮演着重要的角色，保证方程解的存在唯一性的条件总是与解在不动点处或不动点附近的性质有关.

§1.4 函数方程解的存在唯一性

19 世纪以前，也就是在函数方程研究的初级阶段，人们主要着眼于用代换法、赋值法、归纳法、柯西法、微分法和幂级数法等方法具体寻求某些函数方程的解.从 19 世纪 20 年代起，数学家们开始把注意力转向讨论多种方程解的存在唯一性的条件，获得了许多新的进展.

众所周知，函数方程解的存在唯一性定理的确立具有十分重要的理论意义和实用价值.首先，它保证了用函数方程描述实际问题的完整性和合理性；其次，它是函数方程的数值解法的前提与基础，搞不清解的存在唯一性就会使近似求解失去意义.此外，存在性定理的证法往往同时提供了寻求近似解和解的无穷表达式的有效途径.

每考察一类函数方程，都力图给出这类方程在不同函数类中的解的存在唯一性条件.已出现的大量的解的存在唯一性定理构成了函数方程基本理论的主要内容.

通常，证明函数方程在各函数类中解的存在性有三种基本方

法. 其一是逐次逼近法或压缩映象法. 用于证明逐次逼近序列收敛性的方法是多种多样的，而压缩映象法实际上是逐次逼近法的抽象. 其二是利用 Ascoli-Arzela 引理或不动点定理的方法. 这两种方法本质上是一致的. 其三是优级数法. 在应用压缩映象法和优级数法证明解的存在性的同时也证明了解的唯一性.

第2章 函数方程的初等解法

如前所述，在函数方程研究的早期，人们用初等方法在某种假定下寻找方程的解或确定方程无解. 本章主要叙述函数方程具体的初等解法，这对涉猎函数方程的人来说是必须要了解的. 这些解法不少是技巧性很强的、有趣的，但同时又有很大的局限性. 事实上，能够用初等方法求解的函数方程是很少的，而且是限制在某种函数类中求解的. 众所周知，近年来国内外不少数学竞赛试题都涉及函数方程的初等解法.

§2.1 代换法

所谓代换法，就是对函数方程的未知函数或未知函数的自变量作代换，得到一个新的更简单的函数方程，以达到求解函数方程的目的. 这种方法多用于单变量函数方程.

例1 设已知函数 $H(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有定义，未知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为奇函数和偶函数. 试解函数方程

$$f(x)+g(x)=H(x).$$

解 在方程中以 $-x$ 代 x，可得到方程组

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=H(x), \\ f(-x)+g(-x)=H(-x). \end{cases}$$

考虑到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的奇偶性，方程组就变为：

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=H(x), \\ f(x)-g(x)=-H(-x). \end{cases}$$

由此可解得

$$f(x)=\frac{H(x)-H(-x)}{2},\quad x\in[-a,a];$$

$$g(x)=\frac{H(x)+H(-x)}{2},\quad x\in[-a,a].$$

例 2 设 $ab\neq 0$，解函数方程

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\phi(x),\quad x\neq 0.$$

其中，$f(x)$是未知函数.

解 以$\frac{1}{x}$代方程中的x，可得到方程组

$$\begin{cases} af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\phi(x), & x\neq 0,\\ bf(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=\phi\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0. \end{cases}$$

由此，可以得到如下结论：

当 $a^2-b^2\neq 0$ 时，原函数方程有唯一解

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\phi(x)-b\phi\left(\frac{1}{x}\right)\right],\quad x\neq 0;$$

当 $a^2-b^2=0$ 且 $\begin{vmatrix} \phi(x) & b\\ \phi\left(\frac{1}{x}\right) & a \end{vmatrix}=0$ 时，因 $ab\neq 0$，故原函数方程有无穷多个解；

当 $a^2-b^2=0$ 且 $\begin{vmatrix} \phi(x) & b\\ \phi\left(\frac{1}{x}\right) & a \end{vmatrix}\neq 0$ 时，原函数方程无解.

注 在例 1 中，函数方程中涉及未知函数的奇偶性，此时自变量 x 的位置具有互反性，用 $-x$ 代 x 所得新方程与原方程组成方程组，通过解方程组可求出未知函数；在例 2 中，函数方程中的函数自变量有互倒关系，可用$\frac{1}{x}$代 x，用类似的方法求出未知函数.

下面的例子也说明了这种方法的可行性.

例 3 求函数方程 $\frac{x^2}{1+x^2}f(x^2)+xf\left(\frac{1}{x^2}\right)=4x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的解.

解 在方程中,以 $\frac{1}{x}$ 代 x,可得到方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x^2}f(x^2)+xf\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=4x,\\ \dfrac{1}{1+x^2}f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{1}{x}f(x^2)=\dfrac{4}{x}.\end{cases}$$

可解出:

$$f(x^2)=\frac{4(x^2-x+1)(x^2+1)}{x^4+x^2+1}.$$

若以 x 代 x^2,则可得到原函数方程在 $(0,+\infty)$ 上的解为:

$$f(x)=\frac{4(x-\sqrt{x}+1)(x+1)}{x^2+x+1}.$$

§2.2 赋值法

对所给的函数方程,在函数定义域内给自变量以某些特殊值,从而求出未知函数,这种方法称为**赋值法**. 这种方法对多变量函数方程的求解更为适用.

例 1 设多项式 $p(x)$ 满足 $p(0)=0$,且对任何实数 x,有

$$p(x^2+1)=[p(x)]^2+1,$$

试求 $p(x)$.

解 由于 $p(0)=0$,所以当令 $x=0$ 时,可得

$$p(1)=1.$$

再令 $x=1$,可得

$$p(2)=[p(1)]^2+1=2.$$

再令 $x=2$,可得

$$p(5)=[p(2)]^2+1=5.$$

如此继续下去,可得

$$p(26)=26,$$

$$p(26^2+1)=26^2+1,$$

$$\cdots.$$

这样,$p(x)-x=0$ 有无穷多个根.由代数基本定理知,必有

$$p(x)-x\equiv 0,$$

即

$$p(x)\equiv x.$$

例 2 试求定义在自然数集上的函数 $f(x)$,使

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy,\quad f(1)=1.$$

解 令 $y=1$,则有

$$f(x+1)=f(x)+f(1)+x=f(x)+x+1,$$

即

$$f(x+1)-f(x)=x+1. \tag{2.2.1}$$

在式(2.2.1)中,分别令 $x=1,2,\cdots,m$,可得

$$f(2)-f(1)=2,$$

$$f(3)-f(2)=3,$$

$$\cdots$$

$$f(m)-f(m-1)=m.$$

将以上各式两边分别相加,可得

$$f(m)-f(1)=2+3+\cdots+m,$$

从而得

$$f(m)=1+2+3+\cdots+m=\frac{1}{2}m(m+1),$$

即

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x+1).$$

例 3 解函数方程

$$f(x)=\cos\frac{x}{2}\cdot f\left(\frac{x}{2}\right).$$

其中，$f(x)$为连续函数，且 $f(0)=1$.

解 由原函数方程可推得

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{x}{2^2}\cdot f\left(\frac{x}{2^2}\right),$$

$$f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\cos\frac{x}{2^3}\cdot f\left(\frac{x}{2^3}\right).$$

依此类推，有

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)=\cos\frac{x}{2^n}\cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

把以上各式依次代入原函数方程，可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^n}\cdots f\left(\frac{x}{2^n}\right)\\&=\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right)\\&=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}}\cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right).\end{aligned}$$

因为 $f(x)$连续，且 $f(0)=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}}\cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}}\cdot\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=1\cdot f(0)=1,$$

故

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}}\cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{\sin x}{x}\cdot 1=\frac{\sin x}{x}.$$

利用连续延拓定理，我们定义 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，又因 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以有

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

此即为函数方程的解.

以上几题的解法又称为**累次迭代法**，是解函数方程的重要技巧.

例 4 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$\forall x,y\in\mathbf{R}\backslash\{\ln 2\}$，有

$$f(x+y)+f(x-y)=\mathrm{e}^{x+y}[f(x)+f(y)]. \quad (2.2.2)$$

若 $f(0)=1$，求 $f(x)$.

解 在方程(2.2.2)中，取 $x=0$，并将 y 用 x 代替，可得到

$$f(x)+f(-x)=\mathrm{e}^{x}[f(x)+1],$$

即

$$(1-\mathrm{e}^{x})f(x)+f(-x)=\mathrm{e}^{x}.$$

注意到方程(2.2.2)的右边当 x,y 互换之后仍不变，从而有 $f(x-y)=f(y-x)$. 取 $y=0$，则 $f(x)=f(-x)$，即 $f(x)$ 为偶函数，因此

$$(2-\mathrm{e}^{x})f(x)=\mathrm{e}^{x},$$

即

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{2-\mathrm{e}^{x}},\quad x\in\mathbf{R}\backslash\{\ln 2\}.$$

在上面的问题中，由于含有两个变量 x,y，通过赋值法我们可

以求出一些特殊点的函数值，把含有 x,y 的函数方程化成只含有一个变量的函数方程，从而大大简化了函数方程，使求解过程更加容易. 赋值法是最基本的求解函数方程的方法.

下面我们来看一个较为复杂的问题.

例 5 设 $f(x)$ 的定义域、值域都为 $\mathbf{R}$，求解函数方程

$$f^{n+1}(x)=f^n(x)+\mathrm{e}^{f^n(x)},\quad x\in\mathbf{R}. \tag{2.2.3}$$

解 因为 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，所以 $\forall y_0\in\mathbf{R}$，$\exists x_0\in\mathbf{R}$，满足 $f(x_0)=y_0$，又因 $x_0\in\mathbf{R}$，于是 $\exists x_1\in\mathbf{R}$，满足 $f(x_1)=x_0$，即 $y_0=f[f(x_1)]=f^2(x_1)$，…，如此继续下去，一定存在 $x_{n-1}\in\mathbf{R}$，有 $y_0=f^n(x_{n-1})$. 将 x_{n-1} 代入方程(2.2.3)，可得

$$f(y_0)=y_0+\mathrm{e}^{y_0}.$$

由于 y_0 的任意性，所以 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$，$x\in\mathbf{R}$.

此例灵活运用了赋值法，并不求出 $y_0,x_0,\cdots,x_{n-1}$，而只指出了 $x_0,\cdots,x_{n-1}$ 的存在性，最后利用 y_0 的任意性得到了所要求的结果.

§2.3 归纳法

根据已知条件，首先通过赋值法求出 $f(x)$ 在某些点的特殊值，然后猜想 $f(x)$ 的表达式，最后用数学归纳法证明该猜想.

例 1 求满足条件 $2f(x)=f(x+1)+f(x-1)$ 的多项式.

解 由题意，有 $f(x+1)=2f(x)-f(x-1)$，于是有

$$f(2)=2f(1)-f(0)=2[f(1)-f(0)]+f(0),$$
$$f(3)=2f(2)-f(1)=3[f(1)-f(0)]+f(0),$$
$$f(4)=2f(3)-f(2)=4[f(1)-f(0)]+f(0).$$

令 $a=f(1)-f(0)$，$b=f(0)$，猜想 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $f(n)=an+b$. 下面用数学归纳法证明它.

(1) 当 $n=1,2,3,4$ 时，$f(n)=an+b$ 显然成立.

(2) 假设对 n 成立，即 $f(n)=an+b$，则

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2f(n)-f(n-1) \\ &= 2(an+b)-[a(n-1)+b] \\ &= a(n+1)+b. \end{aligned}$$

综合(1)和(2)，则 $\forall n\in\mathbf{N}, f(n)=an+b$ 成立. 因为 $f(x)$ 是多项式，且 $f(x)-ax-b=0$ 有无穷多个解(事实上，对任意一个正整数，都有 $f(n)-an-b=0$)，故 $f(x)-ax-b\equiv 0$，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=ax+b$.

在这一问题中，我们利用了这样的事实：任意一个 $n(n\in\mathbf{N})$ 次多项式的零根个数不超过 n 个.

例 2 试解函数方程

$$f(n)=\cos\theta+f(n-1)\sin\theta.$$

其中，$f(1)=\cos\theta, \theta\in[0,2\pi], n\in\mathbf{N}$.

解 由已知 $f(1)=\cos\theta$ 及所给的函数方程，得

$$f(2)=\cos\theta+\cos\theta\sin\theta=\cos\theta(1+\sin\theta);$$

$$f(3)=\cos\theta+\cos\theta(1+\sin\theta)\sin\theta=\cos\theta(1+\sin\theta+\sin^2\theta);$$

$$\begin{aligned} f(4) &= \cos\theta+\cos\theta(1+\sin\theta+\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= \cos\theta(1+\sin\theta+\sin^2\theta+\sin^3\theta); \end{aligned}$$

$$\cdots.$$

由此可猜想出

$$\begin{aligned} f(n) &= \cos\theta(1+\sin\theta+\sin^2\theta+\cdots+\sin^{n-1}\theta) \\ &= \frac{\cos\theta(1-\sin^n\theta)}{1-\sin\theta}. \end{aligned}$$

下面用数学归纳法来证明这个结论.

(1) 当 $n=1$ 时，$f(1)=\dfrac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin\theta}=\cos\theta$，命题成立；

(2) 假设当 $n=k$ 时，有 $f(k)=\dfrac{\cos\theta(1-\sin^k\theta)}{1-\sin\theta}$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$f(k+1)=\cos\theta+f(k)\sin\theta$$
$$=\cos\theta+\frac{\cos\theta(1-\sin^k\theta)\sin\theta}{1-\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin^{k+1}\theta}{1-\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta(1-\sin^{k+1}\theta)}{1-\sin\theta},$$

即当 $n=k+1$ 时，命题成立.

由(1)和(2)得命题成立，即有 $f(n)=\frac{\cos\theta(1-\sin^n\theta)}{1-\sin\theta}$ $(n=1,2,\cdots)$.

例 3 证明：不存在非负整数集 $\mathbf{N}_0$ 到 $\mathbf{N}_0$ 的这样一个函数，能使对任一 $n\in\mathbf{N}_0$，有

$$f[f(n)]=n+1\ 987$$

成立.

证 如果存在这样的函数，则

$$f(n+1\ 987)=f[f(f(n))]=f(n)+1\ 987$$

对所有 $n\in\mathbf{N}_0$ 成立. 应用数学归纳法可得

$$f(n+1\ 987\cdot k)=f(n)=1\ 987\cdot k$$

对所有 $n,k\in\mathbf{N}_0$ 成立.

设 $r\in\mathbf{N}_0$，$r\leqslant 1\ 986$，则

$$f(r)=1\ 987\cdot k+l.$$

其中，$l,k\in\mathbf{N}_0$，$l\leqslant 1\ 986$.

根据定义，有

$$r+1\ 987=f[f(r)]=f(1\ 987\cdot k+l)=f(l)+1\ 987\cdot k,$$

所以 k 只可能是 0 或 1.

从以上两式可知：当 $k=1$ 时，$f(r)=1\ 987+l$，$f(l)=r$，故 $r\neq l$；当 $k=0$ 时，$f(r)=l$，$f(l)=r+1\ 987$，故也有 $r\neq l$. 因此，数集 $\{0,1,2,\cdots,1\ 986\}$ 中的数总是两两配对的，使得

$$f(l)=r,\quad f(r)=1\,987+l$$

或

$$f(r)=l,\quad f(l)=1\,987+r,$$

而且 $r\neq l$. 但是数集$\{0,1,2,\cdots,1\,986\}$中共有 1 987 个数，两两配对后总有一对数相同，这与 $r\neq l$ 矛盾，故所求函数不存在.

例 4 求在$(-\infty,+\infty)$上满足 $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$的连续函数.

解 满足上式的 $f(x)$有如下性质：

(1) $f(x)$在 **R** 上非负.

当 $x\geqslant 0$ 时，取 $y=x$，则 $f(\sqrt{2}x)=[f(x)]^2\geqslant 0$，即 $\forall x\geqslant 0$，$f(0)\geqslant 0$.

当 $x<0$ 时，取 $y=-x$，则 $f(x)f(-x)=f(-\sqrt{2}x)\geqslant 0$，所以 $\forall x<0$，$f(0)\geqslant 0$.

因此，$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\geqslant 0$.

(2) $f(x)$在 **R** 上为偶函数.

取 $x=y=0$，有 $f(0)=[f(0)]^2$，解出 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

(ⅰ) 若 $f(0)=0$，则 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\equiv 0$. 事实上，$\forall x\geqslant 0$，$f(x)=f(\sqrt{x^2+0^2})=f(x)f(0)=0$；$\forall x<0$，$f(x)f(x)=f(\sqrt{x^2+x^2})=f(-\sqrt{2}x)=0$，即$[f(x)]^2=0$，所以 $f(x)=0$，从而 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\equiv 0$. 显然，$f(x)$为偶函数.

(ⅱ) 若 $f(0)=1$，则 $\forall x\leqslant 0$，$f(-x)=f(\sqrt{x^2+0^2})=f(x)f(0)=f(x)$，故 $f(x)$为偶函数.

显然，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\equiv 0$ 是其解. 下面不妨设 $f(0)=1$ 且对 $x\geqslant 0$ 进行考虑.

(3) 对任一正有理数 $\frac{q}{p}$，有 $f(\frac{q}{p})=[f(1)]^{(\frac{q}{p})^2}$.

首先用归纳法证明：$\forall x\geqslant 0$，有 $f(\sqrt{n}x)=[f(x)]^n$.

(ⅰ) 当 $n=2$ 时，$f(\sqrt{2}x)=f(\sqrt{x^2+x^2})=[f(x)]^2$.

(ⅱ) 假设对 n 成立，即 $f(\sqrt{n}x)=[f(x)]^n$，则

$$f(\sqrt{n+1}x)=f(\sqrt{nx^2+x^2})=f(\sqrt{n}x)f(x)=[f(x)]^{n+1}.$$

因此，$\forall x\in\mathbf{N}$，有 $f(\sqrt{n}x)=[f(x)]^n$. 特别地，有

$$f(\sqrt{n})=[f(1)]^n,$$

$$f(n)=f(\sqrt{n}\sqrt{n})=[f(\sqrt{n})]^n=f[f(1)]^{n^2},$$

$$f(1)=f(\sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n}})=\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^n,$$

即

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=[f(1)]^{\frac{1}{n}}.$$

又

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=f\left(\sqrt{n}\frac{1}{n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n,$$

亦即

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=[f(1)]^{(\frac{1}{n})^2}.$$

同样，用归纳法可以证明 $f\left(\frac{q}{p}\right)=[f(1)]^{(\frac{q}{p})^2}$.

(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)=[f(1)]^{x^2}$.

这由(3)的结论和 $f(x)$ 的连续性以及 $f(x)$ 的偶函数性质可以得到. 因此，函数为

$$f(x)=[f(1)]^{x^2}.$$

这里巧妙地运用了两次归纳法，证明了当 x 为自然数、有理数时，都有 $f(x)=[f(1)]^{x^2}$，再结合连续性，便得到了想要的结果. 由此可以看出，猜测出 $f(x)$ 的表达式是十分重要的一步. 如果我们把前面介绍的一些方法结合起来解决问题，则会更加灵活、更

加有效.

§2.4 柯西法

这种方法最早是法国数学家柯西(Cauchy)运用于求解的,后来被称为柯西方程的函数方程.其基本思想是先求出方程在自变量为自然数时的解,然后证明该解的表达式对自变量为整数、有理数及实数时仍满足函数方程,从而求得函数方程的解.这种方法的实质在以下的证明过程中会一目了然.

例 1 证明:Cauchy 函数方程

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\quad x,y\in\mathbf{R} \tag{2.4.1}$$

有连续解

$$\varphi(x)=cx. \tag{2.4.2}$$

其中,c 为常数.

证 依归纳法,$\forall n\in\mathbf{N}$,有 $\varphi(nx)=n\varphi(x)$.若以 $\frac{x}{n}$ 代 x,可得

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}\varphi(x).$$

又从方程(2.4.1)可推出

$$\varphi(0+x)=\varphi(0)+\varphi(x),$$

于是

$$\varphi(0)=0,$$

$$\varphi[x+(-x)]=\varphi(x)+\varphi(-x)=\varphi(0)=0,$$

从而

$$\varphi(x)=-\varphi(-x).$$

于是,对任意 $p,q\in\mathbf{N}$,有

$$\varphi\left(\frac{px}{q}\right)=\frac{p}{q}\varphi(x).$$

这就是说,对任意有理数 r,有 $\varphi(rx)=r\varphi(x)$.特别地,令

$x=1$，并记 $\varphi(1)=c$，则得到 $\varphi(r)=cr$.

设 λ 为任意一个无理数，取有理数列 $\{r_n\}$（如取趋于 λ 的有限十进制小数序列），则

$$\varphi(r_n)=cr_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

因 φ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，故令 $n\to\infty$，可得 $\varphi(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(r_n)=\lim\limits_{n\to\infty}cr_n=c\lambda$.

综上所述，结论得证.

根据例 1 的结果，可以证明 Cauchy 函数方程

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y),\quad x,y\in\mathbf{R} \tag{2.4.3}$$

有非零连续解

$$\varphi(x)=a^x,\quad a>0. \tag{2.4.4}$$

证 由条件可知，存在 x_0，使 $\varphi(x_0)\neq0$. 在方程(2.4.3)中以 x_0-x 代 y，可得

$$\varphi(x)\varphi(x_0-x)=\varphi(x_0)\neq0,$$

因此，对任意 x，都有 $\varphi(x)\neq0$.

在方程(2.4.3)中，令 $x=y=\frac{z}{2}$，可得到 $\varphi(z)=\left[\varphi\left(\frac{z}{2}\right)\right]^2$，这表明，$\forall x\in\mathbf{R}$，$\varphi(x)$ 都是正的. 这样，对方程(2.4.3)取以 e 为底的对数，有

$$\ln\varphi(x+y)=\ln\varphi(x)+\ln\varphi(y).$$

记 $g(x)=\ln\varphi(x)$，则由复合函数连续性知 $g(x)$ 是连续的，且

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\quad x,y\in\mathbf{R}.$$

由例 1 的结果可知

$$g(x)=\ln\varphi(x)=cx\quad(c\text{ 为常数}).$$

从而 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{cx}=a^x(a=\mathrm{e}^c>0)$. 证讫.

例 2 证明：Cauchy 函数方程

$$\varphi(y+x)+\varphi(y-x)=2\varphi(x)\varphi(y) \tag{2.4.5}$$

在 $\mathbf{R}$ 上的非零解是三角余弦函数或双曲余弦函数.

证 令 $x=0$，并取 y 使 $\varphi(y)\neq 0$. 由方程(2.4.5)可得

$$\varphi(0)=1. \tag{2.4.6}$$

在方程(2.4.5)中，令 $y=0$，又得

$$\varphi(-x)=\varphi(x). \tag{2.4.7}$$

由式(2.4.6)知，当 $x=0$ 时，φ 是正的，故存在 $c>0$，使 φ 在 $[0,c]$ 内是正的.

当 $\varphi(c)\leqslant 1$ 时，因 $0<\varphi(c)\leqslant 1$，故存在 $\theta\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，使

$$\varphi(c)=\cos\theta. \tag{2.4.8}$$

方程(2.4.5)可以写成

$$\varphi(y+x)=2\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y-x),$$

依次取 $x=c,y=c;x=c,y=2c;x=c,y=3c;\cdots$. 这样，由式(2.4.6)和(2.4.8)可得

$$\varphi(2c)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,$$

$$\varphi(3c)=2\cos 2\theta\cos\theta-\cos\theta=\cos 3\theta,$$

$$\varphi(4c)=2\cos 3\theta\cos\theta-\cos\theta=\cos 4\theta,$$

$$\cdots.$$

依数学归纳法可证：对任意 $m\in\mathbf{N}$，有

$$\varphi(mc)=\cos m\theta. \tag{2.4.9}$$

若在方程(2.4.5)中令 $x=y=\frac{c}{2}$，则由式(2.4.6)和(2.4.8)可得

$$\left[\varphi\left(\frac{c}{2}\right)\right]^2=\frac{\varphi(0)+\varphi(c)}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2.$$

考虑到在 0 与 c 之间 φ 是正的，$\cos x$ 在 0 与 θ 之间也是正的，故有 $\varphi\left(\frac{c}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}$.

同理，在方程(2.4.5)中令 $x=y=\frac{c}{2^2}$，就能推出 $\varphi\left(\frac{c}{2^2}\right)=\cos\frac{\theta}{2^2}$.

依数学归纳法可证：对任意 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\varphi\left(\frac{c}{2^n}\right)=\cos\frac{\theta}{2^n}. \tag{2.4.10}$$

重复式(2.4.8)到(2.4.9)的过程，从式(2.4.10)可得

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}c\right)=\cos\frac{m}{2^n}\theta.$$

若用 x 表示 $\frac{m}{2^n}$，就有 $\varphi(cx)=\cos\theta x$. 但是每个正实数都可以表示为二进制小数，而且 φ 与余弦函数均是连续的，因而对所有 $x>0$，都有 $\varphi(cx)=\cos\theta x$. 类似地，对 $x<0$，$x=0$，也有 $\varphi(cx)=\cos\theta x$. 若以 $\frac{x}{c}$ 代替 x，并设 $\frac{\theta}{c}=a$，就有

$$\varphi(x)=\cos ax. \tag{2.4.11}$$

当 $\varphi(c)>1$ 时，仿以上证明，可以推出

$$\varphi(x)=\operatorname{ch}ax. \tag{2.4.12}$$

实际上，利用柯西方法还可以证明其他的 Cauchy 函数方程的连续解的存在性.

例 3 设 $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ 满足

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$$

对任意 $x,y\in\mathbf{Q}$ 都成立，且 $f(1)=2$. 试求 $f(x)$.

解 令 $y=1$，则对任意 $x\in\mathbf{Q}$，有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x\cdot 1)=f(x)f(1)-f(x+1)+1\\&=2f(x)-f(x+1)+1,\end{aligned}$$

即对任意 $x\in\mathbf{Q}$，有

$$f(x+1)=f(x)+1.$$

以 $x-1$ 代替 x，得 $f(x)=f(x-1)+1$，从而

$$f(x-1)=f(x)-1.$$

于是，由归纳法易证：对任意 $m\in\mathbf{Z}$，有

$$f(x+m)=f(x)+m.$$

取 $x=1$，则 $f(1+m)=f(1)+m=m+2$. 故对任意 $m\in\mathbf{Z}$，有 $f(m)=m+1$，即 $f(x)=x+1(x\in\mathbf{Z})$. 于是，对任意 $\frac{n}{m}\in\mathbf{Q}(m\in\mathbf{N}, n\in\mathbf{Z},(m,n)=1)$，有

$$\begin{aligned} n+1=f(n)&=f\left(\frac{n}{m}\cdot m\right)\\ &=f\left(\frac{n}{m}\right)\cdot f(m)-f\left(\frac{n}{m}+m\right)+1\\ &=(m+1)f\left(\frac{n}{m}\right)-\left[f\left(\frac{n}{m}\right)+m\right]+1\\ &=m\cdot f\left(\frac{n}{m}\right)-m+1, \end{aligned}$$

即 $f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}+1$. 从而，对任意 $x\in\mathbf{Q}$，有 $f(x)=x+1$.

§2.5 微分法

微分法是先将函数方程化为微分方程，然后再解微分方程，以求出函数方程的解的方法. 显然，这种方法所求的一定是函数方程的可微解.

例 1 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可微函数，满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+xy^2+x^2y,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$$

试求 $f(x)$.

解 令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$. 因为

$$f(x+y)-f(y)=f(x)+xy(x+y+1),$$

故

$$\frac{f(x+y)-f(y)}{(x+y)-y}=\frac{f(x)}{x}+y(x+y+1).$$

因为 $f(x)$是可微函数，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+y)-f(y)}{x+y-y}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to 0}y(x+y+1),$$

即

$$f'(y)=y^2+y+1 \text{ 或 } f'(x)=x^2+x+1.$$

从而

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(x^2+x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C.$$

由 $f(0)=0$，得 $C=0$. 所以，所求的函数为

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x.$$

例 2 若函数方程

$$f[w(x,y)]=R[f(x),f(y)] \tag{2.5.1}$$

满足

(ⅰ) $w(x,y)$和 $R(u,v)$分别在 $I\times I$ 和 $J\times J$ 上存在连续的偏导数. 这里，I 表示区间(a,b)，J 表示区间(c,d).

(ⅱ) 存在 $\overline{w},\overline{R}$，使

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big/\frac{\partial w}{\partial y}=\pm\frac{\overline{w}(x)}{\overline{w}(y)},\quad \frac{\partial R}{\partial u}\Big/\frac{\partial R}{\partial v}=\pm\frac{\overline{R}(u)}{\overline{R}(v)},$$

且两等式的右边取相同的符号. 其中，$\overline{w}(x)$在 I 内连续，且 $\overline{w}(x)\neq 0$；$\overline{R}(u)$在 J 内连续，且 $\overline{R}(u)\neq 0$.

这样，函数方程(2.5.1)在某区间上的逐段严格单调的可微的形式解 f 可通过下述方法来求解.

令 $u=f(x)$，$v=f(y)$，对方程(2.5.1)的两边分别关于 x 和 y 求偏导数，得

$$f'(w)\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\quad f'(w)\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

由于只考察某区间上的严格单调的、可微的未知函数 f，故总可以假设 $f'(w)\neq 0$(这是因为，若在某点处 f 的导数等于 0，那就可

以用该点将原区间划分成两个子区间，在每个子区间上仍有 $f'(w)\neq 0$，且 f 是严格单调的）. 由条件（ⅰ），（ⅱ），将上面两式相除，可得

$$\frac{\overline{R}(u)}{\overline{w}}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\overline{R}(v)}{\overline{w}(y)}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}. \tag{2.5.2}$$

考虑到 x 与 y 的任意性，从方程(2.5.2)就能得到关于函数 $u=f(x)$ 的可分离变量方程

$$\frac{\overline{R}(u)}{\overline{w}(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=c.$$

因 $\overline{R}(u)\neq 0$，$\overline{w}(x)\neq 0$，又 $u=f(x)$ 是严格单调的可微函数，故这个方程中的 c 是不为零的常数.

将上面方程分离变量，可得

$$\overline{R}(u)\mathrm{d}u=c\overline{w}(x)\mathrm{d}x,\quad c\neq 0.$$

由于 $\overline{R}(u)$ 与 $\overline{w}(x)$ 分别是 I 与 J 内的连续函数，所以对方程两边分别关于 u 和 x 积分，可得

$$\int\overline{R}(u)\mathrm{d}u=\int c\overline{w}(x)\mathrm{d}x+c_1,\quad c_1\text{ 为任意常数.}$$

为了方便，记 $F(u)=\int\overline{R}(u)\mathrm{d}u$，这样就有

$$F(u)=c\int\overline{w}(x)\mathrm{d}x+c_1.$$

由于在 J 内，$F'(u)=\overline{R}(u)\neq 0$，根据隐函数存在定理可知，上式确定了 I 上的一个隐函数 $u=F^{-1}\left(c\int\overline{w}(x)\mathrm{d}x+c_1\right)$，从而

$$f(x)=F^{-1}\left(c\int\overline{w}(x)\mathrm{d}x+c_1\right) \tag{2.5.3}$$

是函数方程(2.5.1)满足条件（ⅰ），（ⅱ）的严格单调的形式可微解.

由于初等函数（除去常函数）是逐段严格单调的、可微的，因此运用此法的条件容易得到满足.

例 3 求函数方程

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} \tag{2.5.4}$$

的可微解.

解 易见两函数 $w(x,y)=x+y$ 和 $R(u,v)=\dfrac{u+v}{1-uv}$ 分别在 $\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 与 $\{(u,v)\mid u>0,v<0$ 或 $u<0,v>0\}$ 上存在连续偏导数，且 $\overline{w}(x)\equiv 1$ 在 $\mathbf{R}$ 内连续，$\overline{R}(u)=\dfrac{1}{1+u^2}\neq 0$ 也在 $(0,+\infty)$ 或 $(-\infty,0)$ 内连续. 解关于 $u=f(x)$ 的可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=c\mathrm{d}x,\quad c\neq 0,$$

可以得到方程(2.5.4)的逐段严格单调的形式可微解

$$u=f(x)=\tan(cx+c_1),\quad c_1\text{ 为任意常数.}$$

将它代入方程(2.5.4)，并令 $x=y=0$，就有

$$\tan c_1=\tan 2c_1,$$

于是

$$c_1=n\pi,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

这样，可得函数方程(2.5.4)的可微解为 $f(x)=\tan cx$.

例 4 解函数方程

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=f(x)+f(y).\tag{2.5.5}$$

解 容易验证 $w(x,y)=\dfrac{x+y}{1+xy}$ 与 $R(u,v)=u+v$ 分别在 $I\times I$ 与 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上存在偏导数，其中 $I=(-1,1)$；另外，在 I 上，$\overline{w}(x)=\dfrac{1}{1-x^2}\neq 0$ 是连续的，$\overline{R}(u)=1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 依上述方程，解关于 $u=f(x)$ 的微分方程

$$\mathrm{d}u=\frac{c}{1-x^2}\mathrm{d}x,\quad c\neq 0,$$

得方程(2.5.5)的形式可微解为

$$u=f(x)=\frac{c}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+c_1.$$

其中，c_1 为任意常数. 将此代入方程(2.5.5)，比较得到 $c_1=0$. 若令 $\alpha=\frac{c}{2}\neq 0$，就可得到方程(2.5.5)的严格单调的可微解

$$f(x)=\alpha\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

例 5 解函数方程

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}. \tag{2.5.6}$$

解 易见，方程(2.5.6)满足条件(ⅰ)和(ⅱ). 这里 $w(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$，$R(u,v)=\frac{u+v}{u-v}$，从而

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big/\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{1}{x}\Big/\frac{1}{y},\quad \frac{\partial R}{\partial u}\Big/\frac{\partial R}{\partial v}=-\frac{1}{u}\Big/\frac{1}{v}.$$

因此，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内，$\overline{w}(x)=\frac{1}{x}\neq 0$ 与 $\overline{R}(u)=\frac{1}{u}\neq 0$ 都是连续的. 根据前述的方法，解关于 $u=f(x)$ 的可分离变量方程

$$\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{c}{x}\mathrm{d}x,\quad c\neq 0,$$

得到方程(2.5.6)的逐段严格单调的形式可微解

$$u=f(x)=c_1x^c. \tag{2.5.7}$$

其中，c_1 为任意常数. 将式(2.5.7)代入方程(2.5.6)，得到 $\frac{x^c+y^c}{x^c-y^c}=c_1\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^c$. 若令 $x=1,y=0$，可得 $c_1=1$. 于是有

$$\frac{x^c+y^c}{x^c-y^c}=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^c.$$

在上式中，令 $x=2,y=1$，又可得 $3^c(2^c-1)=2^c+1$，即

$$(3^c-1)(2^c-1)-2=0. \tag{2.5.8}$$

容易证明：$c=1$ 是方程(2.5.8)的唯一解.

另外，当 $c>1$ 时，有 $3^c-1>2$，$2^c-1>1$，故

$$(3^c-1)(2^c-1)-2>0;$$

当 $0\leqslant c<1$ 时，有 $0\leqslant 3^c-1<2$，$0\leqslant 2^c-1<1$，故

$$(3^c-1)(2^c-1)-2<0;$$

当 $c<0$ 时，有 $1>1-3^c>0$，$1>1-2^c>0$，故

$$(3^c-1)(2^c-1)-2=(1-3^c)(1-2^c)-2<0.$$

综上所述，方程(2.5.6)有可微解 $f(x)=x$.

例 6 在推导随机变量的指数分布函数时，会遇到函数方程

$$F(t+s)=1-[1-F(t)][1-F(s)]. \tag{2.5.9}$$

其中，$F(t)$是分布函数，它在$(0,+\infty)$上是单调递增函数，且 $0\leqslant F(t)\leqslant 1$.

现在，用前述方法解方程(2.5.9)，易见，$w(t,s)=t+s$ 与 $R(u,v)=1-(1-u)(1-v)=u+v-uv$ 分别在$(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$与$(0,1)\times(0,1)$上存在偏导数. 另外，$\overline{w}(t)=1$ 在$(0,+\infty)$上连续，$\overline{R}(u)=\dfrac{1}{1-u}\neq 0$ 在$(0,1)$上连续. 解关于 $u=F(t)$的可分离变量方程

$$\frac{1}{1-u}\mathrm{d}u=\lambda\mathrm{d}t,\quad \lambda\neq 0,$$

得到方程(2.5.9)的严格单调的形式可微解

$$u=F(t)=1-c\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

其中，c 为任意常数. 将此代入方程(2.5.9)，比较可得 $c=c^2$，由于只求严格单调解，故 $c=1$. 这样，函数方程(2.5.9)的解为

$$F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

考虑到 $F(t)$是$(0,+\infty)$上严格单调增函数，故这里的 $\lambda>0$.

例 7 设函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 满足

$$f(xy)=f(x)f(y), \tag{2.5.10}$$

求 $f(x)$.

解 首先，由于 $f(x)$不恒等于 0，可知必存在 $x_0\in\mathbf{R}^+$ 使

$f(x_0)\neq 0$. 又由式(2.5.10)知

$$f(x_0)=f\left(x\cdot\frac{x_0}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{x_0}{x}\right)\neq 0,$$

即对任意 $x\in\mathbf{R}^+$, $f(x)\neq 0$. 再由式(2.5.10)知

$$f(x)=f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})=[f(\sqrt{x})]^2\geqslant 0,$$

但 $f(x)\neq 0$, 所以对任意 $x\in\mathbf{R}^+$, $f(x)>0$.

其次, 在式(2.5.10)中, 令 $x=y=1$, 有 $f(1)=1$, 故

$$1=f(1)=f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)f(\frac{1}{x}),$$

即有 $f(x)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$. 从而由导数的定义, 有

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)-1}{h\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)}\\
&=\frac{f(x)}{x}\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\dfrac{x+h}{x}\right)-1}{\dfrac{h}{x}}\\
&=\frac{f(x)}{x}\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{h}{x}\right)-f(1)}{\dfrac{h}{x}}\\
&=\frac{f(x)}{x}f'(1),
\end{aligned}$$

即有

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}f'(1). \tag{2.5.11}$$

分离变量后两端积分得

$$\ln f(x)=f'(1)\ln x+C. \tag{2.5.12}$$

由 $f(1)=1$，知 $C=0$，故

$$\ln f(x)=f'(1)\ln x=\ln[x^{f'(1)}].$$

从而

$$f(x)=x^{f'(1)}=x^{\alpha}.$$

其中，$\alpha=f'(1)$.

我们还可以考察含多个未知函数的函数方程

$$f[w(x,y)]=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)g_k(y). \tag{2.5.13}$$

其中，$f,f_k,g_k(k=1,2,\cdots,n)$为未知函数；$w$ 为已知函数. 为此，我们先叙述下面的定义与引理.

定义 1 设函数组 $\varphi_k:I\to\mathbf{R}(k=1,2,\cdots,n)$. 若存在不全为零的常数 $c_k(k=1,2,\cdots,n)$，使

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)=0,\quad x\in I,$$

则称函数组$\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$在区间 I 上**线性相关**；反之，称函数组$\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$在 I 上**线性无关**.（以后常以 I 表示一个区间.）

引理 2.5.1 函数组$\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$在区间 I 上线性相关的充分必要条件是对任意$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in I^n$，有

$$\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1)\\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}=0.$$

上式左边的行列式称为 Casorati **行列式**，通常记为 $\det[\varphi_k(x_j)]$

$(k,j=1,2,\cdots,n)$.

关于函数方程(2.5.13),我们可获得如下的结果.

例 8 若函数方程(2.5.13)满足

(ⅰ) $f_k:I\to\mathbf{R},g_k:I\to\mathbf{R}(k=1,2,\cdots,n)$可微,$I$ 是 $\mathbf{R}$ 上非空开区间;

(ⅱ) $w:I\times I\to I,w(x,y)$存在两个不等于零的偏导数,且

$$\frac{\partial w}{\partial x}/\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{\beta(y)}\text{ 或}\frac{\partial w}{\partial x}/\frac{\partial w}{\partial y}=\alpha(x);$$

(ⅲ) $f:I\to\mathbf{R}$ 是可微的,且 $f'(x)\neq 0(x\in I)$;

(ⅳ) 函数组$\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$与$\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$均在 I 上线性无关;

(ⅴ) 存在 $\bar{y}\in I$ 使 $w(x,\bar{y})=x$,或存在 $\bar{x}\in I$ 使 $w(\bar{x},y)=y$,则满足函数方程(2.5.13)的未知函数 f_k 与 $g_k(k=1,2,\cdots,n)$可取为符合上述条件的适当函数,而未知函数 f 适合某常系数线性微分方程.

证 由条件(ⅰ),对方程(2.5.13)分别关于 x 和 y 求导,得

$$f'[w(x,y)]\frac{\partial w}{\partial x}=\sum_{k=1}^{n}f_k'(x)g_k(y),\qquad(2.5.14)$$

$$f'[w(x,y)]\frac{\partial w}{\partial y}=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)g_k'(y).\qquad(2.5.15)$$

由条件(ⅱ),不妨设 $\dfrac{\partial w}{\partial x}/\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{1}{\beta(y)}(\beta(y)\neq 0)$,从方程(2.5.14)和(2.5.15)可得到

$$\beta(y)\sum_{k=1}^{n}f_k'(x)g_k(y)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)g_k'(y).\qquad(2.5.16)$$

又由条件(ⅳ)及 $\beta(y)\neq 0$,根据引理 2.5.1 知,存在 $y_1,y_2,\cdots,y_n\in I$,使

$$\det[\beta(y_j)g_k(y_j)]\neq 0,\quad k,j=1,2,\cdots,n.$$

于是,由方程(2.5.16)产生关于 $f_k'(x)(k=1,2,\cdots,n)$的线性方程

组

$$\sum_{k=1}^{n}\beta(y_j)g_k(y_j)f'_k(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)g'_k(y_j),\quad j=1,\cdots,n.$$

由此可解出

$$f'_k(x)=\sum_{m=1}^{n}a_{km}f_m(x),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{2.5.17}$$

其中，$a_{km}(k=1,2,\cdots,n)$为实常数.

再由条件(Ⅴ)，在方程(2.5.16)中令 $y=\bar{y}$，可得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}b_kf_k(x),\quad b_k=g_k(\bar{y}). \tag{2.5.18}$$

对式(2.5.18)两边逐次求导，并注意到式(2.5.17)，有

$$\begin{cases} f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{1k}f_k(x), \\ f''(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{2k}f_k(x), \\ \vdots \\ f^{(n)}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{nk}f_k(x). \end{cases} \tag{2.5.19}$$

实际上，式(2.5.19)是关于 $f_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$的线性方程组. 其中，$b_{ik}(i,k=1,2,\cdots,n)$均为实常数.

若 $\det b_{ik}=0(i,k=1,2,\cdots,n)$，则存在不全为零的常数 c_1，$c_2,\cdots,c_n$，使 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_ib_{ik}=0(k=1,2,\cdots,n)$. 由方程组(2.5.19)可知，$f$ 满足常系数线性方程

$$\sum_{i=1}^{n}c_if^{(i)}(x)=0.$$

若 $\det b_{ik}\neq 0(i,k=1,2,\cdots,n)$，则由上述方程组(2.5.19)可知，$f_k(k=1,2,\cdots,n)$能表示为 $f',\cdots,f^{(n)}$ 的线性组合，再代入式(2.5.18)，就可得到 f 所满足的常系数线性微分方程

$$f(x)+\sum_{i=1}^{n}d_i f^{(i)}(x)=0.$$

于是,结论得证.

§2.6 幂级数法

类似于微分方程中的幂级数解法,对函数方程我们也试图用幂级数法求解.首先假定未知函数 $f(x)$ 是解析的,即 $f(x)$ 能在 x_0 点的邻域内展开成幂级数,且幂级数具有正的收敛半径.在解具体的函数方程时,我们可选取幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k.$$

假定它有正的收敛半径且满足函数方程,并将它代入函数方程,由恒等式,用待定系数法确定各项系数 $a_k(k=0,1,2,\cdots)$,从而形式地得到函数方程的幂级数解.再考虑幂级数是否真有正的收敛半径,如果形式解 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ 有正的收敛半径,就说明函数方程有解析解;否则,就说明函数方程无解析解.

例 1 考察函数方程

$$f(2x)=2[f(x)]^2-1 \tag{2.6.1}$$

的非常数解析解.

首先,设方程有幂级数形式解

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n. \tag{2.6.2}$$

将式(2.6.2)代入方程(2.6.1),得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_n x^n &= 2\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\Big)^2-1\\ &=(2a_0^2-1)+4a_0a_1x+2(a_1^2+2a_0a_2)x^2+\\ &\quad 2(2a_0a_3+2a_1a_2)x^3+2(2a_0a_4+2a_1a_3+a_2^2)x^4+\cdots.\end{aligned}$$

比较两边系数，可确定 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 如下：

由 $a_0=2a_0^2-1$，得 $a_0=1$ 或 $a_0=-\frac{1}{2}$；

由 $2a_1=4a_0a_1$，得 $a_1=0$；

由 $2^2a_2=2(a_1^2+2a_0a_2)$，得 a_2 为任意实数，不妨假设 $a_2=\frac{2a}{2!}$（a 为任意实常数）或 $a_2=0$；

由 $2^3a_3=2(2a_0a_3+2a_1a_2)$，得 $a_3=0$；

由 $2^4a_4=2(2a_0a_4+2a_1a_3+a_2^2)$，得 $a_4=\frac{(2a)^2}{4!}$ 或 $a_4=0$；

$\cdots$.

可以证明：一般地，对任意自然数 k，有 $a_{2k-1}=0$，$a_{2k}=\frac{(2a)^k}{(2k)!}$ 或 $a_{2k}=0$.

显而易见，仅当 $a_0=1$ 时，方程(2.6.1)才有非常数的形式解

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2a)^k}{(2k)!}x^{2k}. \tag{2.6.3}$$

其中，a 为任意非零常数. 不难求出幂级数(2.6.3)的收敛半径为 $R=+\infty$.

(1) 当 $a<0$ 时，可令 $2a=-b^2$（b 为任意非零常数），由式(2.6.3)可得方程(2.6.1)的解析解

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(bx)^{2k}}{(2k)!}=\cos bx,\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

(2) 当 $a>0$ 时，可令 $2a=c^2$（c 为任意非零常数），由式(2.6.3)可得方程(2.6.1)的另一个解析解

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(cx)^{2k}}{(2k)!}=\operatorname{ch}cx,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 2 考察函数方程

$$f(2x)=2f'(x)f(x) \tag{2.6.4}$$

的解析解.

先设方程(2.6.4)的形式幂级数解为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

将上式代入方程(2.6.4),比较系数可得

$$a_0=2a_1a_0; \tag{2.6.5}$$

$$2a_1=4a_2a_0+2a_1^2; \tag{2.6.6}$$

$$\vdots$$

$$2^na_n=2(n+1)a_0a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}2ka_ka_{n+1-k}. \tag{2.6.7}$$

其中,$n=0,1,2,\cdots$.

由式(2.6.5)知 $a_0=f(0)=0$ 或 $a_0\neq0$,从而分两种进行情况讨论:

(1) 若 $a_0=0$,则由式(2.6.6)可得到 $a_1=f'(0)=0$ 或 $a_1=1$.

① 当 $a_0=0,a_1=0$ 时,由递推公式(2.6.7),用数学归纳法可以证明:$a_n=0(n=2,3,\cdots)$. 于是,得到方程(2.6.4)的平凡解 $f(x)=0,x\in(-\infty,+\infty)$.

② 当 $a_0=0,a_1=1$ 时,由式(2.6.7)得 $a_2=0,a_3=\dfrac{f'''(0)}{3!}$ 为任意实数,今任取 $f'''(0)=\eta\in\mathbf{R}$,则 $a_3=\dfrac{\eta}{3!}$. 用数学归纳法可以证明:对一切 n,

$$a_{2n}=0, \tag{2.6.8}$$

$$a_{2n+1}=\frac{\eta^n}{(2n+1)!}, \tag{2.6.9}$$

成立.

由递推公式(2.6.7),可知公式(2.6.8)显然成立. 现在,我们来证明式(2.6.9)也成立. 事实上,当 $n=1$ 时,式(2.6.9)明显成立. 假设对 $2,3,\cdots,n$,公式(2.6.9)成立,那么由递推公式(2.6.7)

可得

$$[2^{2n+2}-(2n+3)-1]a_{2n+3}$$

$$=\frac{3\cdot\eta^{n+1}}{3!(2n+1)!}+\frac{5\cdot\eta^{n+1}}{5!(2n-1)!}+\cdots+\frac{(2n+1)\eta^{n+1}}{(2n+1)!3!}$$

$$=\left[\frac{(2n+3)!}{2!(2n+1)!}+\frac{(2n+3)!}{4!(2n-1)!}+\cdots+\frac{(2n+3)!}{(2n)!3!}\right]\frac{\eta^{n+1}}{(2n+3)!}$$

即

$$(2^{2n+2}-C_{2n+1}^{2n+2}-C_{2n+3}^{0})a_{2n+3}$$

$$=(C_{2n+3}^{2}+C_{2n+3}^{4}+\cdots+C_{2n+3}^{2n})\frac{\eta^{n+1}}{(2n+3)!}.$$

当考虑到

$$2^{2n+2}=C_{2n+3}^{0}+C_{2n+3}^{2}+C_{2n+3}^{4}+\cdots+C_{2n+3}^{2n}+C_{2n+3}^{2n+2},$$

立即得到

$$a_{2n+3}=\frac{\eta^{n+1}}{(2n+3)!}.$$

于是,式(2.6.9)对任意自然数 n 皆成立.这样,就得到方程(2.6.4)的解析解为

$$f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \tag{2.6.10}$$

这个幂级数对于 $x\in\mathbf{R}$ 的收敛性是显而易见的,进而可以发现:

(ⅰ) 当 $\eta=0$ 时,由式(2.6.10)可得方程(2.6.4)的解析解

$$f(x)=x,\quad x\in\mathbf{R}.$$

(ⅱ) 当 $\eta>0$ 时,若记 $\eta^{\frac{1}{2}}=a$,由式(2.6.10)可得方程(2.6.4)的解析解

$$f(x)=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{\operatorname{sh}ax}{a},\quad x\in\mathbf{R}.$$

(ⅲ) 当 $\eta<0$ 时,若记 $|\eta|^{\frac{1}{2}}=a$,可得方程(2.6.4)的解析解

$$f(x)=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{\sin ax}{a},\quad x\in\mathbf{R}.$$

(2) 若 $a_0=r\neq 1$(r 为任意实数),则由式(2.6.5)得 $a_1=\frac{1}{2}$,再根据递推关系式(2.6.7),用数学归纳法可以证明:对于一切自然数 n,有

$$a_n=\frac{1}{n!2^n r^{n-1}}. \tag{2.6.11}$$

事实上,当 $n=1$ 时,式(2.6.11)显然成立.假设对 $2,3,\cdots,n$,公式(2.6.11)也成立,那么由式(2.6.7)可得

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{1}{2(n+1)r}\Big(2^n a_n-\sum_{k=1}^{n}2ka_k a_{n+1-k}\\
&=\frac{1}{2(n+1)r}\Big((2^n-1-n)a_n-\sum_{k=2}^{n-1}2ka_k a_{n+1-k}\Big)\\
&=\Big(2^n-1-n-\sum_{k=2}^{n-1}C_n^{k-1}\Big)\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}r^n}\\
&=\Big(2^n-\sum_{k=0}^{n}C_n^k+1\Big)\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}r^n}\\
&=\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}r^n}.
\end{aligned}$$

这是因为 $\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$,所以式(2.6.11)得证.这样,我们又可得到方程(2.6.4)的另一个解析解

$$f(x)=r+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!2^n r^{n-1}}=r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\frac{x}{2r}\Big)^n.$$

它的右端幂级数对 $x\in\mathbf{R}$ 的收敛性是明显的.实际上,这是一个指数函数的解

$$f(x)=re^{\frac{x}{2r}},\quad x\in\mathbf{R}. \tag{2.6.12}$$

综合上面的讨论,可以得到以下结论:

若 $f^{(n)}(0)(n=0,1,2,\cdots)$ 都存在，则函数方程(2.6.4)在 $\mathbf{R}$ 上存在解析解，且

(ⅰ) 当 $f(0)=0, f'(0)=0$ 时，方程(2.6.4)在 $\mathbf{R}$ 上有平凡解析解 $f(x)=0$；

(ⅱ) 当 $f(0)=0, f'(0)=1, f'''(0)=0$ 时，方程(2.6.4)在 $\mathbf{R}$ 上有解析解 $f(x)=x$；

(ⅲ) 当 $f(0)=0, f'(0)=1, f'''(0)=\eta>0$ 时，方程(2.6.4)在 $\mathbf{R}$ 上有解析解 $f(x)=\dfrac{\operatorname{sh} ax}{a}$(其中，$a=\eta^{\frac{1}{2}}$)；

(ⅳ) 当 $f(0)=0, f'(0)=1, f'''(0)=\eta<0$ 时，方程(2.6.4)在 $\mathbf{R}$ 上有解析解 $f(x)=\dfrac{\sin ax}{a}$(其中，$a=|\eta|^{\frac{1}{2}}$)；

(ⅴ) 当 $f(0)=r\neq 0$ 时，方程(2.6.4)在 $\mathbf{R}$ 上有解析解 $f(x)=re^{\frac{x}{2r}}$.

关于函数方程的幂级数形式的解析解在后面还有较多的论述.

§2.7 其他方法

由于函数方程具有复杂性，因此能用于求函数方程解的方法也是多种多样的. 下面我们再介绍几种常见的求函数方程解的方法.

1) 不动点法

例 1 已知 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 且满足条件

(1) 对任意 $x,y\in\mathbf{R}^+$，$f[xf(y)]=yf(x)$；

(2) 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$.

试求函数 $f(x)$. 其中，$\mathbf{R}^+=\{x:x>0\}$.

解 令 $x=y$，有

$$f[xf(x)]=xf(x),$$

可见，$xf(x)$是 f 的不动点，其不动点集为

$$\{xf(x):x\in\mathbf{R}^+\}.$$

再令 $x=y=1$，代入 $f[xf(y)]=yf(x)$，有

$$f[f(1)]=f(1). \tag{2.7.1}$$

又令 $x=1,y=f(1)$，代入 $f[xf(y)]=yf(x)$，有

$$f[f(1)]=[f(1)]^2. \tag{2.7.2}$$

将式(2.7.1)和(2.7.2)两式联立，有

$$f(1)=[f(1)]^2.$$

故 $f(1)=1$，$f(1)=0$(舍去)．这说明 1 是 f 的不动点，故 $xf(x)=1$，即 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x\in\mathbf{R}^+$．

下面证 f 的不动点是唯一的．可用反证法证明．假设有 $a=f(a)$，$a\neq1$．

(ⅰ) 若 $a>1$，则由 $f[xf(x)]=xf(x)$，令 $x=a$，可得

$$f[af(a)]=af(a).$$

故

$$f(a^2)=a^2,$$

所以

$$f(a^4)=a^4,$$

$$\cdots$$

$$f(a^{2n})=a^{2n}.$$

这与当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to0$ 矛盾．

(ⅱ) 若 $0<a<1$，则由

$$1=f(1)=f\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)=f\left[\frac{1}{a}f(a)\right]=af\left(\frac{1}{a}\right)$$

得

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}.$$

这与 $a=f(a)$ 且 $0<a<1$ 矛盾. 从而 $a=f(a)$，$a\neq 1$ 不成立. 故只有 $a=1$ 这一个不动点.

2) 迭代法

例 2 求函数方程 $f^2(x)=x^2+2x$，$x\in\mathbf{R}$ 的一个解.

解 令 $F(x)=f^2(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$，则

$$F^2(x)=(x+1)^{2^2}-1,$$

$$\cdots$$

$$F^n(x)=(x+1)^{2^n}-1.$$

再令 $n=\frac{1}{2}$，可得

$$f(x)=(x+1)^{2^{\frac{1}{2}}}-1=(x+1)^{\sqrt{2}}-1.$$

3) 辅助函数法

例 3 若 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，$f(0)=0$，$f(1)=1$，且对任何 $x\in[0,1]$，存在 $h>0$，当 $0\leqslant x-h<x+h\leqslant 1$ 时，有

$$f(x)=\frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}. \tag{2.7.3}$$

试证明：对任意 $x\in[0,1]$，都有 $f(x)=x$.

证 作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(0)=F(1)=0$，可见 F 与 f 满足相同条件. 若 $F(x)$ 的最大值 $M>0$，令 $x_0=\inf\{x: F(x)=M\}$，则由 F 的连续性可知 $F(x_0)=M>0$，因此 $x_0>0$. 于是，存在 $h>0$，$0\leqslant x_0-h<x_0+h\leqslant 1$，使

$$F(x_0)=\frac{F(x_0-h)+F(x_0+h)}{2}. \tag{2.7.4}$$

由于 M 是最大值，所以 $F(x_0\pm h)\leqslant M$. 又由 x_0 的定义知，$F(x_0-h)<M$，于是由式(2.7.4)知 $M=0$.

同理，可证 $F(x)$ 的最小值为 0. 因此，对任意 $x\in[0,1]$，有 $F(x)=0$，从而 $f(x)=x$.

如前所述，函数方程的初等解法有很多，它们大都在技巧方面

有明显的差异.

另外,求一个函数方程的通解(所有解)往往是困难的,这时常要涉及某些任意函数.例如函数方程

$$f(-x)=f(x),\quad x\in\mathbf{R},$$

除了 $f(x)=\cos x, x^2$ 等外,还有无穷多个解,因为所有的偶函数都是它的解,因此它的通解可以表示为

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\geqslant 0,\\ g(-x), & x<0. \end{cases}$$

其中,$g(x)$是定义在$[0,+\infty)$上的任意函数.

一般来说,一个函数方程的通解族的表达是十分困难的.

第3章 函数方程解的存在性

如前所述，函数方程的求解是困难的，这如同微分方程一样. 大量的函数方程的研究往往是着眼于找到其某类(连续的、可微的、凸的、单调的、解析的等)解存在的条件. 因此，研究函数方程解存在性、唯一性成了函数方程研究的重要方向之一. 本章我们将介绍一些解的存在唯一性结果.

§3.1 非负解

考虑线性方程

$$\varphi[f(x)] = g(x)\varphi(x) + h(x), \tag{3.1.1}$$

其中，φ 为未知函数；f，g 和 h 均为已知函数.

定义序列 $\{G_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 如下：

$$G_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} g[f^i(x)], \quad n \in \mathbf{N}. \tag{3.1.2}$$

从本章中我们将可以看出，式(3.1.2)这种类型的序列在线性方程理论中起着十分关键的作用.

定理 3.1.1 令 I 是一实区间，函数 $f: I\to I$，$g: I\to\mathbf{R}$ 和 $h: I\to\mathbf{R}$ 满足 $g<0$ 和 $h\geqslant 0$. 假设

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h[f^n(x)]}{G_{n+1}(x)} = 0, \quad \forall x \in I. \tag{3.1.3}$$

如果一个非负函数 $\varphi: I\to\mathbf{R}^+$ 满足方程(3.1.1)，则

$$\varphi(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h[f^n(x)]}{G_{n+1}(x)}, \quad \forall x \in I. \tag{3.1.4}$$

如果进一步假设

$$h[f(x)]+g[f(x)]h(x)\leqslant 0,\quad \forall x\in I,\tag{3.1.5}$$

则方程(3.1.1)只有形如式(3.1.4)的唯一解.

证 如果 $\varphi:I\to\mathbf{R}^+$ 满足方程(3.1.1),则由归纳法得

$$\varphi(x)=\frac{\varphi[f^k(x)]}{G_k(x)}-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{h[f^n(x)]}{G_{n+1}(x)},\quad k\in\mathbf{N},\tag{3.1.6}$$

由于 $\varphi\geqslant 0, g<0$,且

$$G_k(x)=(-1)^k\mid G_k(x)\mid,\quad k\in\mathbf{N}_0,\tag{3.1.7}$$

其中,N_0 表示所有非负整数的集合,于是

$$-\sum_{n=0}^{2k}\frac{h[f^n(x)]}{G_{n+1}(x)}\geqslant\varphi(x)\geqslant-\sum_{n=0}^{2k-1}\frac{h[f^n(x)]}{G_{n+1}(x)},\quad k\in\mathbf{N}.$$

由式(3.1.6)类似可得

$$-\sum_{n=0}^{2k}\frac{h[f^n(x)]}{G_{n+1}(x)}\geqslant\varphi(x)\geqslant-\sum_{n=0}^{2k+1}\frac{h[f^n(x)]}{G_{n+1}(x)},\quad k\in\mathbf{N}.$$

因此

$$\left|\varphi(x)+\sum_{n=0}^{k-1}\frac{h[f^n(x)]}{G_{n+1}(x)}\right|\leqslant\frac{h[f^k(x)]}{\mid G_{k+1}(x)\mid},\quad k\in\mathbf{N}.$$

上式两边对 k 取极限,由式(3.1.3),则式(3.1.4)得证.

如果式(3.1.5)成立,则下列不等式

$$\frac{h[f^{n+1}(x)]}{\mid G_{n+2}(x)\mid}\leqslant\frac{h[f^n(x)]}{\mid G_{n+1}(x)\mid},\quad n\in\mathbf{N}_0,$$

也成立,再结合式(3.1.3)可知交错级数式(3.1.4)是收敛的.可以直接验证式(3.1.4)满足方程(3.1.1),而式(3.1.4)的非负性是显然的,从而定理得证.

如果 $g<0$ 且 $h<0$,则方程(3.1.1)显然无非负解.

定理 3.1.2 令 I 是一实区间.如果函数 $f:I\to I, g:I\to\mathbf{R}$ 和 $h:I\to\mathbf{R}$ 满足 $g>0$ 和 $h\leqslant 0$,则方程(3.1.1)存在非负解的充分必要条件为级数(3.1.4)收敛.

证 如果级数(3.1.4)收敛,由于$\forall n\in\mathbf{N}_0$,$G_{n+1}>0$,从而易知φ非负且满足方程(3.1.1).

反过来,假设$\varphi:I\to\mathbf{R}^+$满足方程(3.1.1),则式(3.1.6)显然成立,因此

$$0\leqslant-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{h[f^n(x)]}{G_{n+1}(x)}\leqslant\varphi(x),\quad k\in\mathbf{N}. \tag{3.1.8}$$

由式(3.1.8),可知级数(3.1.4)是收敛的.

§3.2 单调解

我们首先讨论齐次线性方程

$$\varphi[f(x)]=g(x)\varphi(x), \tag{3.2.1}$$

且假设

(ⅰ) $I=|0,a|$(这里,$|\cdot,\cdot|$表示开或闭的区间),$a>0$;

(ⅱ) $f:I\to I$连续、递增且$0<f(x)<x$;

(ⅲ) $g:I\to\mathbf{R}$在I中为正的.

下面的定理3.2.1给出了方程(3.2.1)单调解的存在唯一性.我们首先叙述两个引理.

引理3.2.1 如果$f(x)$在区间$I=|0,a|(a>0)$上连续,且$\forall x\in I\backslash\{0\}$,$f(x)<x$,则对任意$x\in I$,序列$\{f^n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$递减且$\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=0$.进而,若对任意$x\in I\backslash\{0\}$,$0<f(x)<x$,则$\forall x\in I\backslash\{0\}$,序列$\{f^n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$是严格递减的.

引理3.2.2 假设(ⅰ)~(ⅲ)成立,且$\varphi:I\to\mathbf{R}$是方程(3.2.1)的一个单调解,则φ保号,即$\varphi\equiv0$,或$\varphi>0$,或$\varphi<0$.

证 若存在$x_0\in I$,使得$\varphi(x_0)=0$,则由方程(3.2.1),可知$\varphi[f^n(x_0)]=0$,$n\in\mathbf{N}_0$(非负整数集).因φ单调,则$\varphi(x)=0$,$x\in[0,x_0]$.由引理3.2.1,可知$\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=0$.

若存在$x_1\in I$,$x_1>x_0$使$\varphi(x_1)\neq0$,从而由方程(3.2.1)知

$\varphi[f^n(x_1)]\neq 0, n\in \mathbf{N}_0$，但 $f^n(x_1)\to 0(n\to\infty)$，这显然矛盾.

因此，要么 $\varphi\equiv 0$，要么 $\varphi\neq 0$. 由于 $g>0$，所以 φ 在每个序列 $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbf{N}_0}$ $(x\in I)$ 上保持符号不变. 又由 φ 的单调性，可知 φ 在整个区间 I 上保号.

定理 3.2.1 假设(ⅰ)～(ⅲ)成立，且

$$\lim_{n\to\infty} g[f^n(x)]=1, \quad x\in I. \tag{3.2.2}$$

若 $\varphi: I\to\mathbf{R}$ 是方程(3.2.1)的单调解，则

$$\varphi(x)=c\lim_{n\to\infty}\frac{G_n(x_0)}{G_n(x)}=c\prod_{n=0}^{\infty}\frac{g[f^n(x_0)]}{g[f^n(x)]}. \tag{3.2.3}$$

其中，$x_0\in I$ 为任一固定数；$c=\varphi(x_0)$.

证 若 $\varphi=0$，则令 $c=0$ 即可.

若 $\varphi\neq 0$，则由引理 3.2.2 知 φ 在 I 上保号. 假设 I 为正且递增. 现任取 $x\in I$，由归纳法可知

$$\varphi[f^n(x)]=G_n(x)\varphi(x), \quad n\in\mathbf{N}. \tag{3.2.4}$$

记 $y=\max\{x_0,x\}$，由引理 3.2.1，可知 $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(y)=0$，因此，存在 $m\in\mathbf{N}$，使 $x_0, x\in[f^m(y), y]$. 由式(3.2.4)和 φ 的单调性，可知

$$\begin{aligned} G_m[f^n(y)]&=\prod_{i=0}^{m-1} g[f^{n+i}(y)]=\frac{\varphi[f^{n+m}(y)]}{\varphi[f^n(y)]}\\ &\leqslant\frac{\varphi[f^n(x)]}{\varphi[f^n(x_0)]}\leqslant\frac{\varphi[f^n(y)]}{\varphi[f^{n+m}(y)]}\\ &=[G_m(f^n(y))]^{-1}. \end{aligned}$$

在上式两端令 $n\to\infty$，由式(3.2.2)知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi[f^n(x)]}{\varphi[f^n(x_0)]}=1, \quad \forall x\in I. \tag{3.2.5}$$

由式(3.2.4)与(3.2.5)即得式(3.2.3)，且 $c=\varphi(x_0)$.

*§ 3.3 凸 解

现在考虑线性方程(3.1.1)的特殊形式

$$\varphi[f(x)]=\varphi(x)+h(x). \tag{3.3.1}$$

下面证明方程(3.3.1)凸解的存在唯一性定理. 假设

(ⅰ) $I=[0,a]$, $a>0$.

(ⅱ) $f:I\to I$ 为凹的、严格递增的. $\forall x\in I, 0<f(x)<x$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

先叙述两个引理.

引理 3.3.1 若(ⅰ)和(ⅱ)成立, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{n+1}(x)-f^n(x)}{f^{n+1}(y)-f^n(y)}=1, \quad x,y\in I. \tag{3.3.2}$$

证 不妨设 $y\leqslant x$, 记

$$x_n=f^n(x), \quad y_n=f^n(y), \quad n\in\mathbf{N}. \tag{3.3.3}$$

由引理 3.2.1, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 于是存在 $k\in\mathbf{N}$, 使得 $x_k\leqslant y\leqslant x$. 又因为 f 为凹的, 故

$$f'_+(x_n)\leqslant\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}\leqslant f'_+(x_{n+1}).$$

其中, f'_+ 表示右导数.

由(ⅱ), 有 $\lim\limits_{x\to 0}f'_+(x)=1$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n+k})-x_{n+k}}{f(x_n)-x_n}=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{f(x_{n+i+1})-f(x_{n+i})}{x_{n+i+1}-x_{n+i}}=1. \tag{3.3.4}$$

其中, $f(x_p)=x_{p+1}$.

由(ⅱ), 可知函数 $f(x)-x$ 在 I 上是非负的、递减的, 又因为 $x_{n+k}\leqslant y_n\leqslant x_n$, 故

$$\frac{f(x_n)-x_n}{f(x_{n+k})-x_{n+k}}\leqslant\frac{f(x_n)-x_n}{f(y_n)-y_n}\leqslant 1, \quad n\in\mathbf{N}.$$

在上式中, 利用式(3.3.4)和(3.3.3), 再对两边令 $n\to\infty$ 取极限, 就可得到式(3.3.2).

引理 3.3.2 如果(ⅰ)与(ⅱ)成立,则对 $x,y\in I$,极限 $\alpha(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(x,y)$存在.其中,

$$\alpha_n(x,y)=\frac{f^n(x)-f^n(y)}{f^{n+1}(y)-f^n(y)},\tag{3.3.5}$$

且对每个固定的 $y\in I$,函数 $\alpha(x,y)$满足 Abel 函数方程

$$\alpha[f(x),y]=\alpha(x,y)+1.\tag{3.3.6}$$

证 仍作式(3.3.3)的假设.任取 $x\in[f(y),y]$,有 $y_{n+1}\leqslant x_n<y_n$.因为 f 是凹的,故其差商递减,即

$$\frac{f(y_{n+1})-f(y_n)}{y_{n+1}-y_n}\geqslant\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n},$$

从而 $0<\alpha_{n+1}(x,y)<\alpha_n(x,y)$,且极限 $\alpha(x,y)\in[0,1]$.

对于任意 $x\in I$,由等式

$$\alpha_n[f(x),y]=\alpha_n(x,y)+\frac{f^{n+1}(x)-f^n(x)}{f^{n+1}(y)-f^n(y)}$$

可知,只需在该式两边对 n 取极限,再利用引理 3.3.1,即可证得方程(3.3.6).

现在,证明一个关于凸解的存在唯一性定理.

定理 3.3.1 假设(ⅰ)与(ⅱ)成立,$h:I\to\mathbf{R}$ 在 I 上是递增(递减)的、凹(凸)的,且存在极限 $L:=\lim\limits_{n\to\infty}h(x_n)$,$0\leqslant L<\infty$($-\infty<L\leqslant 0$),则方程(3.3.1)有唯一的含一个参数的凸(凹)解族 $\varphi:I\to\mathbf{R}$,它们可表示为

$$\varphi(x)=C-\sum_{n=0}^{\infty}[h(f^n(x))-h(f^n(x_0))]+L\alpha(x,x_0).\tag{3.3.7}$$

其中,$x_0\in I$ 为一固定点;$C\in\mathbf{R}$ 为任一常数(参数).

证 简记

$$x_n:=f^n(x),\quad z_n:=f^n(x_0),\quad n\in\mathbf{N}.\tag{3.3.8}$$

易证级数

$$\hat{\varphi}(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}[h(x_n)-h(z_n)]$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}[(h(x_n)-L)-(h(z_n)-L)]$$

在 I 上收敛，且其和满足方程

$$\hat{\varphi}[f(x)] = \hat{\varphi}(x)+[h(x)-L].$$

由引理 3.3.2 知，式(3.3.7)所定义的函数 φ 存在且满足方程(3.3.1). 根据 f,h 的性质，利用式(3.3.7)可知 φ 在 I 上是凸(凹)的.

以下只需证明唯一性. 设有一凸函数 $\varphi: I\to\mathbf{R}$ 满足方程(3.3.1)，我们要证 φ 必由式(3.3.7)给出. 固定一点 $x_0\in I$，任取 $x\in[f(x_0),x_0]$，则 $z_{n+1}<x_n<z_n$，$n\in\mathbf{N}$，且 φ 关于点 $(z_n,\varphi(z_n))$ 的差商递增，于是

$$\frac{h(z_n)}{z_{n+1}-z_n}=\frac{\varphi(z_{n+1})-\varphi(z_n)}{z_{n+1}-z_n}\leqslant\frac{\varphi(x_n)-\varphi(z_n)}{x_n-z_n}.$$

同理可证

$$\frac{h(z_{n-1})}{z_n-z_{n-1}}=\frac{\varphi(z_n)-\varphi(z_{n-1})}{z_n-z_{n-1}}\geqslant\frac{\varphi(x_n)-\varphi(z_n)}{x_n-z_n}.$$

从而

$$\frac{x_n-z_n}{z_n-z_{n-1}}\leqslant\varphi(x_n)-\varphi(z_n)\leqslant\alpha(x,x_0)h(z_n). \quad (3.3.9)$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$，由式(3.3.5)和 L 的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x,z_0)h(z_n)=L\alpha(x,x_0).$$

由式(3.3.5)和(3.3.8)，利用引理 3.3.1 和引理 3.3.2 得

$$\frac{x_n-z_n}{z_n-z_{n-1}}=\alpha_n(x,x_0)\frac{f_{n+1}(x_0)-f_n(x_0)}{f_{n+1}(y)-f_n(y)}$$

因此，由式(3.3.8)和(3.3.9)得

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(f^n(x))-\varphi(f^n(x_0))]=L\alpha(x,x_0). \quad (3.3.10)$$

另一方面，由式(3.3.1)递推可知

$$\varphi[f^n(x)]-\varphi[f^n(x_0)]=\varphi(x)-\varphi(x_0)+\sum_{i=0}^{n-1}[h(f^i(x))-h(f^i(x_0))]. \tag{3.3.11}$$

而式(3.3.7)可直接从式(3.3.10)与(3.3.11)得到. 其中，$C=\varphi(x_0)$，且 φ 在 $(f(x_0),x_0)$ 被唯一确定. 根据式(3.3.1)，此解在整个区间 I 上也是被唯一确定的，从而唯一性得证.

§3.4 连续解

首先，我们来讨论所谓的 Schröder 函数方程(Schröder 于1871年研究过此方程)

$$\varphi[f(x)]=\alpha\varphi(x) \tag{3.4.1}$$

的连续解的存在性. 其中，φ 是未知函数，f 是已知函数.

定理 3.4.1 若 f 在不动点 $x_0=f(x_0)$ 处可微，且 $0<|f'(x_0)|<1$，则 Schröder 方程(3.4.1)在 x_0 的邻域内有解 φ 且 $\varphi'(x_0)$ 存在不为零的充要条件是序列

$$S_n(x)=\frac{f^n(x)-x_0}{a^n(x-x_0)},\quad S_n(x_0)=1$$

在 $x=x_0$ 的某邻域内一致收敛. 其中，$f^n(x)$ 表示函数 f 的 n 次迭代，即 $f^0(x)=x$，$f^{n+1}(x)=f[f^n(x)]$，$n=0,1,2,3,\cdots$.

证 首先对式(3.4.1)两端在 $x=x_0$ 处求导数，可得

$$\varphi'[f(x_0)]f'(x_0)=\alpha\varphi'(x_0),$$

再考虑到 $f(x_0)=x_0$ 及 $\varphi'(x_0)\neq 0$，可得 $f'(x_0)=\alpha$. 由此，我们不妨设 $f'(x_0)=\alpha$.

先证充分性. 若 $\{S_n(x)\}$ 在 x_0 的邻域内一致收敛于函数 $S(x)$，由 $f'(x)$ 存在知 $f^n(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，且 $[f^n(x)]'|_{x=x_0}=\alpha^n$，从而 $S_n(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 又由一致收敛性知 $S(x)$ 在 $x=x_0$

连续，且 $S(x_0)=1$，若令

$$\varphi(x)=(x-x_0)S(x), \tag{3.4.2}$$

则 φ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\varphi'(x_0)=1$.

下面证明 φ 就是方程(3.4.1)的解. 事实上，当 $x=x_0$ 时，φ 显然满足方程(3.4.1)；对 x_0 邻域中的 $x\neq x_0$，由式(3.4.2)，有

$$\begin{aligned}\varphi[f(x)]&=[f(x)-x_0]S[f(x)]\\&=\lim_{n\to\infty}[f(x)-x_0]\frac{f^{n+1}(x)-x_0}{\alpha^n[f(x)-x_0]}\\&=\lim_{n\to\infty}a(x-x_0)\frac{f^{n+1}(x)-x_0}{\alpha^{n+1}(x-x_0)}\\&=\alpha(x-x_0)S(x)=\alpha\varphi(x).\end{aligned}$$

于是充分性得证.

接下来再证必要性. 若方程(3.4.1)有解 φ，且 $\varphi'(x_0)\neq 0$，则由 $|f'(x_0)|<1$ 可知，在 $x=x_0$ 邻域内一致地有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(x)-x_0}{\varphi[f^n(x)]-\varphi(x_0)}=\frac{1}{\varphi'(x_0)}.$$

这是因为在 $x=x_0$ 邻域内，一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=x_0$. 在方程(3.4.1)中取 $x=x_0$，可得

$$\varphi(x_0)=\alpha\varphi(x_0),$$

从而得 $\varphi(x_0)=0$，于是在 x_0 邻域内一致地有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(x)-x_0}{\alpha^n(x-x_0)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(x)-x_0}{\varphi[f^n(x)]}\cdot\frac{\varphi[f^n(x)]}{\alpha^n(x-x_0)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi'(x_0)}\frac{\alpha^n\varphi(x)}{\alpha^n(x-x_0)}\\&=\frac{1}{\varphi'(x_0)}\cdot\frac{\varphi(x)}{x-x_0}\end{aligned}$$

成立. 定理获证.

现在来讨论非齐次线性函数方程

$$\varphi[f(x)]=g(x)\varphi(x)+F(x). \tag{3.4.3}$$

其中，φ 是未知函数；f,g,F 是已知函数.

定理 3.4.2 若函数方程(3.4.3)满足

(ⅰ) f 在区间 $I=[\zeta-\sigma,\zeta+\sigma](\sigma>0)$ 上定义，$f(I)\subset I$，且存在 $a>0$，当 $x\in I$ 时，有 $f(x)-\zeta=s(x-\zeta)+O(|x-\zeta|^{a+1})$，其中 $0<|s|<1$；

(ⅱ) 存在常数 $A>0,\mu>0$，当 $x\in I$ 时，有 $F(x)=O(|x-\zeta|^{\mu})$，且有 $|g(x)|\geqslant e^{-A|x-\zeta|}$.

则必存在 $r(0<r<\sigma)$，使方程(3.4.3)在 $|x-\zeta|\leqslant r$ 上有函数级数解

$$\varphi(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F[f^n(x)]}{\prod_{m=0}^{n}g[f^m(x)]}. \tag{3.4.4}$$

证 根据条件(ⅰ)，有

$$|f(x)-\zeta|\leqslant(|s|+O|x-\zeta|^{a})|x-\zeta|. \tag{3.4.5}$$

由于 $0<|s|<1$，故存在 $\beta>0$，使

$$|s|<\beta<|s|^{\frac{1}{a+1}}.$$

考虑到 $O(|x-\zeta|^{a})=o(1)(x\to\zeta)$，必存在 $r(0<r\leqslant\sigma)$，当 $|x-\zeta|\leqslant r$，有

$$O(|x-\zeta|^{a})\leqslant\beta-|s|. \tag{3.4.6}$$

由式(3.4.5)与(3.4.6)可得

$$|f(x)-\zeta|\leqslant\beta|x-\zeta|,$$

从而

$$|f^n(x)-\zeta|\leqslant\beta^n|x-\zeta|. \tag{3.4.7}$$

又由条件(ⅱ)，$|g(x)|\geqslant e^{-A|x-\zeta|}$，且存在 $k>0$，使 $|F(x)|\leqslant k|x-\zeta|^{\mu}$. 再考虑到式(3.4.7)，当 $|x-\zeta|\leqslant r$ 时，可作如下的估计：

$$\left|\frac{F[f^n(x)]}{\prod_{m=0}^{n}g[f^m(x)]}\right|\leqslant\frac{k|f^n(\zeta)-\zeta|^{\mu}}{\prod_{m=0}^{n}\exp(-A|f^m(x-\zeta)|)}$$

$$\leqslant \frac{k\beta^{n\mu} \mid x-\zeta \mid^{\mu}}{\prod_{m=0}^{n} \exp(-A\beta^{m} \mid x-\zeta \mid)}$$

$$\leqslant k\beta^{n\mu} \mid x-\zeta \mid^{\mu} \exp[A \mid x-\zeta \mid /(1-\beta)]$$

$$\leqslant kr^{\mu}(\beta^{\mu})^{n} \mathrm{e}^{Ar/(1-\beta)}. \tag{3.4.8}$$

由上面可知 $0<\beta<1$，故从式(3.4.8)可知级数(3.4.4)在 $|x-\zeta| \leqslant r$ 上是一致收敛的.

另外，容易验证式(3.4.4)满足方程(3.4.3)，因此，函数级数(3.4.4)就是方程(3.4.3)的解. 证讫.

不难证明：在定理 3.4.2 的条件下，若 f，g 和 F 在 I 上连续，则方程(3.4.3)在 $|x-\zeta| \leqslant r$ 上有形如式(3.4.4)的连续解.

关于非齐次线性函数方程(3.4.3)的连续解的存在性已有许多结果，但过去对 $g(\zeta)=1$(在定理 3.4.2 中 ζ 实际上是 f 的不动点，即 $f(\zeta)=\zeta$)的所谓“不定情况”都认为是很困难的. 现在，我们在定理 3.4.2 中获得了一个包括这种“不定情况”的解的存在唯一性定理. 不难发现，定理 3.4.2 的结果对于 $|g(\zeta)|>1$ 以及 $|g(\zeta)|=1$ 都成立，这可以从条件(ⅱ)所设的 $|g(x)| \geqslant \mathrm{e}^{-A|x-\zeta|}$ 看出. 从这个意义上讲，定理 3.4.2 的结果是颇有意义的.

再来讨论非线性函数方程

$$f(x) = G[x, f(qx)], \quad |q| \leqslant 1 \tag{3.4.9}$$

的连续解的存在唯一性. 其中，f 是未知函数.

定理 3.4.3 设 $I=(-\alpha,\alpha)$，$J=(-\beta,\beta)$ $(\alpha,\beta>0)$. 若方程(3.4.9)满足：

(ⅰ) G 在 $I\times J$ 上连续，且满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L \geqslant 0$，使对于 $I\times J$ 中的任意两点 (x,y_1) 与 (x,y_2)，符合不等式

$$|G(x,y_1)-G(x,y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|.$$

(ⅱ) 存在常数 $\mu \geqslant 0$，使对一切 $x\in I$，

$$|G(x,0)| \leqslant M|x|^{\mu}.$$

成立. 其中，$M=\beta(1-L|q|^{\mu})/\alpha^{\mu}$.

(ⅲ) $L|q|^{\mu}<1$，则必存在连续函数 $f:I\to J$，对 $x\in I$ 满足函数方程(3.4.9).

若又满足条件 $|f(x)|\leqslant N|x|^{\mu}$(这里 $N>0$)，则所确定的满足函数方程(3.4.9)的连续函数 f 是唯一的.

证 先证存在性. 对函数方程(3.4.9)作 Picard 逐次逼近序列

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 0,\\ f_1(x) &= G[x,f_0(qx)] = G(x,0),\\ &\cdots\\ f_n(x) &= G[x,f_{n-1}(qx)]. \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

因 $|q|\leqslant 1$，故对 $n\geqslant 1$，有 $|q^n x|\leqslant|x|\leqslant\alpha$. 又由条件(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)易知

$$\begin{aligned} |f_0(x)| &\leqslant \beta,\\ |f_1(x)| &= |G(x,0)| \leqslant M|x|^{\mu} \leqslant M\alpha^{\mu}\\ &= \beta(1-L|q|^{\mu}) < \beta. \end{aligned}$$

假设 $|f_{n-1}(x)|\leqslant\beta$，这就是说对 $1\leqslant k\leqslant n$，迭代过程都可以施行，依条件(ⅰ)和(ⅱ)可得

$$\begin{aligned} &|f_k(x)-f_{k-1}(x)|\\ &=|G[x,f_{k-1}(qx)]-G[x,f_{k-2}(qx)]|\\ &\leqslant L|f_{k-1}(qx)-f_{k-2}(qx)|\\ &=L|G[qx,f_{k-2}(q^2x)]-G[qx,f_{k-3}(q^2x)]|\\ &\leqslant L^2|f_{k-2}(q^2x)-f_{k-3}(q^2x)|\leqslant\cdots\leqslant L^{k-1}|f_1(q^{k-1}x)|\\ &=L^{k-1}|G(q^{k-1}x,0)|\\ &\leqslant ML^{k-1}(|q|^{\mu})^{k-1}|x|^{\mu}, \end{aligned}$$

即对于 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$|f_k(x)-f_{k-1}(x)|\leqslant M\alpha^{\mu}(L|q|^{\mu})^{k-1}. \tag{3.4.11}$$

再利用条件(ⅱ)和(ⅲ)，就有

$$|f_n(x)| = |f_n(x)-f_0(x)|$$

$$\leqslant |f_n(x)-f_{n-1}(x)|+|f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)|+\cdots+|f_1(x)-f_0(x)|$$
$$\leqslant M\alpha^{\mu}[(L|q|^{\mu})^{n-1}+(L|q|^{\mu})^{n-2}+\cdots+1]$$
$$\leqslant M\alpha^{\mu}[1+(L|q|^{\mu})+(L|q|^{\mu})^2+\cdots]$$
$$=\frac{M\alpha^{\mu}}{1-L|q|^{\mu}}\leqslant\beta.$$

根据数学归纳法，我们证得：对 $n\geqslant 1$，有

$$|f_n(x)|\leqslant\beta.$$

由此可见，对一切 $n\geqslant 1$，$f_n(x)\in J$（当 $x\in I$ 时），故迭代过程(3.4.10)总可以实施.

进而，由式(3.4.11)可知，对 $x\in I$，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}[f_k(x)-f_{k-1}(x)] \tag{3.4.12}$$

有优级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}M\alpha^{\mu}(L|q|^{\mu})^{k-1}. \tag{3.4.13}$$

由于 $L|q|^{\mu}<1$，故优级数(3.4.13)收敛. 根据 Weierstrass 判别法可知，级数(3.4.12)在 I 中一致收敛，亦即$\{f_n(x)\}$在 I 中一致收敛. 设 f 是其极限函数，则 f 必在 I 中连续. 又由 $|f_n(x)|\leqslant\beta$ 可知，对任意 $x\in I$，$|f(x)|\leqslant\beta$ 成立. 因此，f 是 $I\to J$ 的连续函数.

在关系式

$$f_n(x)=G[x,f_{n-1}(q_x)]$$

中，令 $n\to\infty$，立得

$$f(x)=G[x,f(q_x)].$$

至此，就证明了满足方程(3.4.9)的连续函数 $f:I\to J$ 的存在性.

再证明唯一性. 设 g 是 $I\to J$ 的连续函数，它也满足方程(3.4.9)，即 $\forall x\in I$，

$$|g(x)|\leqslant\beta, \tag{3.4.14}$$

$$g(x)=G[x,g(q_x)] \tag{3.4.15}$$

成立. 于是

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)|&=|G[x,f(q_x)]-G[x,g(q_x)]|\\&\leqslant L|f(qx)-g(qx)|.\end{aligned}$$

由归纳法,考虑到$|f(x)|\leqslant N|x|^{\mu}$,$|g(x)|\leqslant N|x|^{\mu}$及(ⅲ),应有

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)|&\leqslant L^n|f(q^nx)-g(q^nx)|\\&\leqslant L^n(|f(q^nx)|+|g(q^nx)|)\\&\leqslant 2NL^n(|q|^{\mu})|x|^{\mu}\\&\leqslant 2N\alpha^{\mu}(L|q|^{\mu})^n\to 0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

从而,对任意$x\in I$,总有$f(x)\equiv g(x)$. 唯一性证讫.

不难看出,以上两个定理都是采用 Picard 逐次逼近法证明的,在这里 Lipschitz 条件起着重要作用. 用类似的方法还可以讨论函数方程

$$f(x)=G[x,f(q_1x),f(q_2x),\cdots,f(q_mx)]$$

的连续解的存在唯一性.

最后,再来研究迭代函数方程

$$G[f(x),f^{n_1}(x),\cdots,f^{n_k}(x)]=F(x) \tag{3.4.16}$$

的连续解的存在性. 先作如下假设:

(ⅰ) $G(y_0,y_1,\cdots,y_k)\in C^0(D,I)$,$I=[a,b]$,$D=I^{k+1}$,且$G(a,a,\cdots,a)=a$,$G(b,b,\cdots,b)=b$;

(ⅱ) 存在常数$\beta_i>0$,$\forall y_i,\bar{y}_i\in I(i=0,1,\cdots,k)$,使$|G(y_0,y_1,\cdots,y_k)-G(\bar{y}_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_k)|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\beta_i|y_i-\bar{y}_i|$,且当$y_i\geqslant\bar{y}_i$时,存在常数$d_0>0$,$d_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,k)$,使$G(y_0,y_1,\cdots,y_k)-G(\bar{y}_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_k)\geqslant\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(y_i-\bar{y}_i)$;

(ⅲ) $F(x)\in C^0(I,I)$,$F(a)=a$,$F(b)=b$,存在常数$M>0$,$\forall x_1,x_2\in I$,$x_1>x_2$,有

$$0 \leqslant F(x_1) - F(x_2) \leqslant \alpha_0 M(x_1 - x_2).$$

另外，定义集合

$$\mathscr{A} = \{\varphi \in C(I,I): \varphi(a) = a, \varphi(b) = b, \exists M > 0, \forall x_1, x_2 \in I, x_1 > x_2, \text{有 } 0 \leqslant \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \leqslant M(x_1 - x_2)\}.$$

定理 3.4.4 若条件(ⅰ)～(ⅲ)满足，则方程(3.4.16)在 $\mathscr{A}$ 上有解.

证 易知 $C^0(I,I)$ 依范数 $\|f\| = \max\limits_{x \in I}\{|f(x)|\}$ 构成 Banach 空间，$\forall \varphi \in \mathscr{A}$，令

$$L_\varphi = G[x, \varphi^{n_1-1}(x), \cdots, \varphi^{n_k-1}(x)]. \tag{3.4.17}$$

可以证明

$$0 < \frac{x_1 - x_2}{\sum\limits_{i=1}^{k+1} \beta_{i-1} M^{n_{i-1}-1}} \leqslant L_\varphi^{-1}(x_1) - L_\varphi^{-1}(x_2) \leqslant \frac{1}{\alpha_0}(x_1 - x_2)$$

且 $L_\varphi: I \to I$ 是 C^0 同胚. $\forall \varphi \in \mathscr{A}$，定义算子

$$T: \mathscr{A} \to C^0(I,I): T_\varphi(x) = L_\varphi^{-1} \circ F(x)$$

可以证明，算子 T 满足 Schauder 定理的全部条件，因此 T 在 $\mathscr{A}$ 上有不动点 $f(x)$，使 $f(x) = L_f^{-1} \circ F(x)$，或 $L_f \circ f(x) = F(x)$. 由式(3.4.17)可知，$f(x)$ 为方程(3.4.16)在 $\mathscr{A}$ 上的解.

*§ 3.5 C^r 类解

现在研究形如

$$\varphi(x) = g(x)\varphi[f(x)] + h(x) \tag{3.5.1}$$

的线性函数方程. 我们作如下假定：

(ⅰ) $X = |0, a|$，$0 < a \leqslant \infty$（这里，$|\cdot, \cdot|$ 表示开或闭的区间）；Y 是 $\mathbf{R}$ 上的 Banach 空间.

(ⅱ) 函数 $f: X \to X$，$g: X \to \mathbf{R}$ 和 $h: X \to Y$ 都是 C^r 类函数，$1 \leqslant r \leqslant \infty$. 此外，在 $X \backslash \{0\}$ 上，$0 \leqslant f(x) < x$，$f'(x) > 0$，$g(x) \neq 0$.

我们直接引用下面的两个引理，而将其证明略去.

引理 3.5.1 设条件(ⅰ)和(ⅱ)满足，且设 $\varphi: X \to Y$ 是一个 C^r 类函数，则

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[g(x)\varphi(f(x))+h(x)]\\&=g(x)[f'(x)]^k\varphi^{(k)}[f(x)]+\\&\sum_{i=0}^{k-1}P_{ki}(x)\varphi^{(i)}[f(x)]+h^{(k)}(x),\\&k=1,2,\cdots,r.\end{aligned}$$

其中，$P_{ki}: X \to \mathbf{R}$ 是 C^{r-k} 类函数.

引理 3.5.2 设条件(ⅰ)和(ⅱ)满足，$0 \notin X$. 固定一个 $x_0 \in X$，记 $X_0=[f(x_0), x_0]$. 那么，每个满足条件

$$\varphi_0(x_0)=g(x_0)\varphi[f(x_0)]+h(x_0), \tag{3.5.2}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(x_0)&=g(x_0)[f'(x_0)]^k\varphi_0^{(k)}[f(x_0)]+h^{(k)}(x_0)+\\&\sum_{i=0}^{k-1}P_{ki}(x_0)\varphi_0^{(i)}[f(x_0)],\\&k=1,2,\cdots,r\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

在 X_0 上的 C^r 类函数 $\varphi_0: X_0 \to Y$ 可唯一地拓展到 X 上成为方程(3.5.1)在 X 上的 C^r 类解 $\varphi: X \to Y$.

定理 3.5.1 设条件(ⅰ)和(ⅱ)满足，$0 \in X$，且

$$|g(0)|[f'(0)]^r<1, \tag{3.5.4}$$

则对每一组满足

$$c_k=g(0)[f'(0)]^k c_k+\sum_{i=0}^{k-1}P_{ki}(0)c_i+h^{(k)}(0), \quad k=0,\cdots,r \tag{3.5.5}$$

的 $c_0, c_1, \cdots, c_r$ 存在唯一适合初始条件的

$$\varphi^{(k)}(0)=c_k, \quad k=0,\cdots,r \tag{3.5.6}$$

的方程(3.5.1)的 C^r 类解 $\varphi: X \to Y$.

证 取正数 $c<a$，令 Ψ 为 $[0,c]$ 上所有 C^r 类函数 $\varphi:[0,c]\to Y$ 的距离空间，且它满足条件(3.5.6)，即有距离

$$\sigma(\varphi_1,\varphi_2)=\sup_{x\in[0,c]}\|\varphi_1^{(r)}(x)-\varphi_2^{(r)}(x)\|.$$

因此，方程(3.5.1)就引出一个 Ψ 到自身的映射，只要 c 取得足够小，这个映射就是压缩的. 由 Banach 定理，方程(3.5.1)有唯一的解 $\varphi:[0,c]\to Y,\varphi\in\Psi$. 依据引理 3.5.2，可知这个解可唯一地拓展到 X 上.

§3.6 解析解

如果一个方程(包括函数方程、微分方程和积分方程等)的解可以展开成幂级数，那么就可以用幂级数解法来求这个方程的解. 通常，这种有正的收敛半径的幂级数解被称为**解析解**. 众所周知，**幂级数解法**是求解函数方程、微分方程和积分方程的非常有效的方法，所求得的方程的解析解为研究解的渐近性态和解的近似表达创造了有利条件，为许多特殊函数的产生开辟了蹊径，而且所得到的许多特殊函数在自然科学的许多领域中都有着广泛的应用.

1) 幂级数解法

在第 2 章中我们已经介绍了简单的幂级数解法. 研究幂级数解法必然涉及所谓的解析函数.

从 Lagrange 时代开始，数学家们就认识到能够由幂级数表示的函数，并称这样的函数为解析函数.

定义 1 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的某邻域 $U(P_0)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,|x_i-x_i^0|<R,i=1,2,\cdots,n\}$ 内可以展成 $(x_1-x_1^0),\cdots,(x_n-x_n^0)$ 的幂级数，则称函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为邻域 $U(P_0)$ 内的**解析函数**.

特别地，若存在 $R>0$，使

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n,\quad |x-x_0|<R,$$

则称 f 是 $|x-x_0|<R$ 上的(一元)**解析函数**. 当 $x_0=0$ 时,形如 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n(|x|<R)$ 的解析函数更是经常用到的. 不难看出,所谓的解析函数 f 就是能表示为具有正的收敛半径 R 的幂级数的函数.

这里指出,当 x 为复变量时,上面的解析函数的定义仍然有效,只是此时 $|x-x_0|<R$ 不再是开区间,而是复平面上的开圆. 在本章中,我们也会讨论某些方程的复解析解.

若一个方程(包括函数方程、微分方程与积分方程)的解可以展成具有正的收敛半径的幂级数,则这个解就称为**解析解**. 而求解析解的方法就是所谓的**幂级数解法**. 为了阐释幂级数解法,下面我们引述一些有关的知识.

引理 3.6.1 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有收敛半径 $R>0$,则对任意 $r(0<r<R)$,必存在 $M>0$,使对一切 n,

$$|a_n|\leqslant\frac{M}{r^n}\tag{3.6.1}$$

成立.

证 由 Abel 定理知,对任意 $r(0<r<R)$,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ 绝对收敛,因而对一切 n,

$$|a_nr^n|\leqslant M$$

成立,从而引理 3.6.1 的不等式(3.6.1)得证.

定义 2 设 $|a_n|\leqslant A_n(n=0,1,2,\cdots)$,则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n\tag{3.6.2}$$

为幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.6.3}$$

的**优级数**. 易见，优级数(3.6.2)的系数 $A_n(n=0,1,2,\cdots)$ 都是正的. 实际上，只需从某项开始有 $|a_n| \leqslant A_n$ 即可.

引理 3.6.2 设(3.6.2)是(3.6.3)的优级数，若(3.6.2)的收敛半径为 $R>0$，则幂级数(3.6.3)的收敛半径至少为 R.

这个引理的结论很显然，在此证明过程省略.

引理 3.6.3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的系数是(3.6.3)的系数的正系数多项式

$$b_n = P_n(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}), \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{3.6.4}$$

若(3.6.2)是(3.6.3)的优级数，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的优级数. 其中，

$$B_n = P_n(A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}), \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{3.6.5}$$

证 当注意到

$$|P_n(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k})| \leqslant P_n(A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}), \quad i = 0,1,2,\cdots$$

时，即可推出此引理的结论.

定义 3 设幂级数(3.6.2)收敛于函数 $F(x)$，而幂级数(3.6.3)收敛于函数 $f(x)$. 若(3.6.2)是(3.6.3)的优级数，则称 F 为 f 的**优函数**，并记为 $f \ll F$.

引理 3.6.4 若

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad |x| < R, \tag{3.6.6}$$

且 $|f(x)| \leqslant M, |x| < R$，则

$$f(x) \ll M/(1 - \frac{x}{r}), \quad 0 < r < R.$$

证 因为 $|a_n| \leqslant M/r^n, 0<r<R$，所以

$$M+\frac{M}{r}x+\cdots+\frac{M}{r^n}x^n+\cdots$$

是(3.6.6)的优级数,而上面的幂级数的和为 $M/(1-\frac{x}{r})$,于是结论得证.

与优函数的概念有关,在解方程时有时还会涉及优方程的概念.关于优方程的一般定义在此就不再赘述了,这将在后面的具体解法中涉及.

附注 1 我们可以依据引理 3.6.2 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有正的收敛半径 R.证明可分两步进行:

第一步:寻找 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的适当的优级数 $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$(使 $|a_n|\leqslant A_n$);

第二步:证明优级数 $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ 有正的收敛半径 R,从而得到欲证的结论.

注意,这种依引理 3.6.2 的证明方法就是属于 Cauchy 的**优级数法**.这个证法在幂级数解法中时常会用到.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$(只考虑 $b_n>0$)的收敛半径的求解,应用数学分析的相关知识就可以了.

附注 2 我们来叙述幂级数解法的思想与步骤.设方程(包括函数方程、微分方程和积分方程等)的未知函数为 f,则求解步骤如下:

第一步:设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{3.6.7}$$

并代入方程,用比较系数的方法确定其系数 $a_n(n=1,2,\cdots)$,此时式(3.6.7)就成了方程的幂级数形式解;

第二步：从式(3.6.7)中直接求出其收敛半径 $R>0$，于是式(3.6.7)便是方程在$(-R,R)$上的解析解. 实际上，收敛半径常常不易直接求出，此时需利用优级数法间接地证明式(3.6.7)在$(-R,R)$上收敛，从而式(3.6.7)是方程在$(-R,R)$上的解析解.

2) 两类线性函数方程的解析解

下面研究两类线性函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i x)+h(x) \tag{3.6.8}$$

和

$$f(x)=p(x)f(\alpha x)+g(x) \tag{3.6.9}$$

在实域内的解析解的存在性和唯一性.

定理 3.6.1 若函数方程(3.6.8)满足条件：

(ⅰ) $|\alpha_i|<1(i=1,2,\cdots,l)$，且$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^n\neq 1(n=0,1,2,\cdots)$；

(ⅱ) $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$.

则在$(-R,R)$内，方程(3.6.8)必存在唯一的解析解 f.

证 由条件(ⅱ)，根据上述引理 3.6.1 可知，对任意 $r(0<r<R)$，总存在 $M>0$，使对一切 n，

$$|h_b|\leqslant\frac{M}{r^n} \tag{3.6.10}$$

成立.

据此，作函数方程(3.6.8)的优方程

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{l}|a_i|\varphi(|\alpha_i|x)+\frac{M}{1-\frac{x}{r}},$$

即

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{l}|a_i|\varphi(|\alpha_i|x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Mx^n}{r^n}. \tag{3.6.11}$$

设方程(3.6.8)的幂级数形式解为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n. \tag{3.6.12}$$

设优方程(3.6.11)的幂级数形式解为

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n. \tag{3.6.13}$$

首先,我们来构造式(3.6.12)的优级数.将式(3.6.12)代入方程(3.6.8),得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=a_1\sum_{n=0}^{\infty}b_n\alpha_1^nx^n+\cdots+a_l\sum_{n=0}^{\infty}b_n\alpha_l^nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}h_nx^n,$$

于是

$$b_n=a_1b_n\alpha_1^n+\cdots+a_lb_n\alpha_l^n+h_n.$$

由条件(ⅰ),得到

$$b_n=\frac{h_n}{1-\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^n}. \tag{3.6.14}$$

再将式(3.6.13)代入式(3.6.11),同理可得

$$c_n=|a_1|\cdot|\alpha_1|^n\cdot c_n+\cdots+|a_l|\cdot|\alpha_l|^n\cdot c_n+\frac{M}{r^n}.$$

注意到条件(ⅰ)的$|\alpha_i|<1(i=1,2,\cdots,l)$,不难看到:存在自然数$N$,当$n>N$时,$\sum_{i=1}^{l}|a_i||\alpha_i|^n<1$总成立,从而

$$c_n=\frac{M}{r^n\left(1-\sum_{i=1}^{l}|a_i||\alpha_i|^n\right)}>0,\quad n>N. \tag{3.6.15}$$

根据式(3.6.10),(3.6.14)和(3.6.15)可得,当$n>N$时,

$$|b_n|=\frac{|h_n|}{\left|1-\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^n\right|}\leqslant\frac{M}{r^n\left(1-\sum_{i=1}^{l}|a_i||\alpha_i|^n\right)}=c_n$$

成立,即

$$|b_n| \leqslant c_n, \quad n > N. \tag{3.6.16}$$

现在，令

$$B_n = \begin{cases} \beta_n, & 0 \leqslant n \leqslant N, \\ c_n, & n > N. \end{cases} \tag{3.6.17}$$

其中，β_n 是一组取定的正常数. 综合式(3.6.15)，(3.6.16) 和 (3.6.17) 可知，$B_n > 0 (n = 0,1,2,\cdots)$，且当 $n > N$ 时，有 $|b_n| \leqslant B_n$. 因此，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ 是式(3.6.12)的优级数.

然后，再证优级数 $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ 有一个正的收敛半径. 由式(3.6.15)，并考虑到 $|\alpha_i| < 1 (i = 1,\cdots,l)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sum_{i=1}^{l} |a_i| |\alpha_i|^n}{r\left(1 - \sum_{i=1}^{l} |a_i| |\alpha_i|^{n+1}\right)} = \frac{1}{r}.$$

这就是说，$\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ 的收敛半径为 $r > 0$.

综上所述，根据引理 3.6.2 可知，方程(3.6.8)存在唯一解析解 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，其收敛半径至少为 r，考虑到 $r (0 < r < R)$ 的任意性，定理得证.

定理 3.6.2 如果线性函数方程(3.6.9)满足条件：

(ⅰ) $|\alpha| < 1$，且 $p(0)\alpha^n \neq 1 (n = 0,1,2,\cdots)$；

(ⅱ) $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ 有收敛半径 $R_1 > 0$，$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ 有收敛半径 $R_2 > 0$.

则在 $(-R,R)$ 上，方程(3.6.9) 存在唯一解析解 f，其中，$R = \min\{R_1, R_2\}$.

证 由条件(ⅱ)及引理 3.6.1 可知，对任意固定的正数 $r_1 (r_1$

$<R_1$),存在 $M_1>0$,使对一切 n,有

$$|p_n|\leqslant\frac{M_1}{r_1^n};$$

又对任意固定的正数 $r_2(r_2<R_2)$,存在 $M_2>0$,使对一切 n,有

$$|q_n|\leqslant\frac{M_2}{r_2^n}.$$

取 $M=\max\{M_1,M_2\}$,$\rho=\min\{r_1,r_2\}$,则对一切 n,

$$|p_n|\leqslant\frac{M}{\rho^n},\quad |q_n|\leqslant\frac{M}{\rho^n} \tag{3.6.18}$$

同时成立. 据此,作方程(3.6.9)的优方程

$$\varphi(x)=\frac{M}{1-\dfrac{x}{\rho}}\varphi(|\alpha|x)+\frac{M}{1-\dfrac{x}{\rho}},$$

即

$$\varphi(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Mx^n}{\rho^n}\right)\varphi(|\alpha|x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Mx^n}{\rho^n}. \tag{3.6.19}$$

设方程(3.6.9)的幂级数形式解为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n. \tag{3.6.20}$$

又设优方程(3.6.19)的幂级数形式解为

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n. \tag{3.6.21}$$

先来构造式(3.6.20)的优级数. 将式(3.6.20)代入方程(3.6.9)中,得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\alpha^nx^n\right)+\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n,$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(p_0\alpha^nb_n+p_1\alpha^{n-1}b_{n-1}+\cdots+p_nb_0)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n,$$

所以

$$b_0 = p_0 b_0 + q_0,$$

$$b_n = (p_0\alpha^n b_n + p_1\alpha^{n-1}b_{n-1} + \cdots + p_n b_0) + q_n, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{3.6.22}$$

其中，$p_0 = p(0)$. 定理的条件(ⅰ)能保证从式(3.6.22)中解出 b_n $(n=0,1,2,\cdots)$.

再将式(3.6.21)代入式(3.6.19)，类似地有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(M|\alpha|^n c_n + \frac{M}{\rho}|\alpha|^{n-1}c_{n-1} + \cdots + \frac{M}{\rho^n}c_0\right)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Mx^n}{\rho^n}.$$

从而可以推出

$$c_0 = Mc_0 + M,$$

$$c_n = \left(M|\alpha|^n c_n + \frac{M}{\rho}|\alpha|^{n-1}c_{n-1} + \cdots + \frac{M}{\rho^n}c_0\right) + \frac{M}{\rho^n}, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{3.6.23}$$

由条件(ⅰ)中$|\alpha|<1$可知，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $M|\alpha|^n<1$. 因此，当 $n>N$ 时，从式(3.6.23)可解得

$$c_n = \frac{1}{1-M|\alpha|^n}\left[\left(\frac{M}{\rho}|\alpha|^{n-1}c_{n-1} + \cdots + \frac{M}{\rho^n}c_0\right) + \frac{M}{\rho^n}\right].$$

由此，令

$$B_n = \begin{cases} \beta_n, & 0 \leqslant n \leqslant N. \\ \dfrac{1}{1-M|\alpha|^n}\left[\left(\dfrac{M}{\rho}|\alpha|^{n-1}B_{n-1} + \cdots + \dfrac{M}{\rho^n}B_0\right) + \dfrac{M}{\rho^n}\right], & n > N. \end{cases} \tag{3.6.24}$$

其中，β_n 是取定的一组正数，且使 $|b_n| \leqslant \beta_n$ $(0 \leqslant n \leqslant N)$. 从式(3.6.24)易见，对一切 n，$B_n>0$ 成立.

另外，由式(3.6.18)，(3.6.22)和(3.6.24)可作如下估计：

$$
\begin{aligned}
|b_{N+1}| &\leqslant \frac{1}{1-|p_0||\alpha|^{N+1}}[(p_1|\alpha|^N|b_N|+\cdots+ \\
&\quad |p_{N+1}||b_0|)+|q_{N+1}|] \\
&\leqslant \frac{1}{1-M|\alpha|^{N+1}}\left[\left(\frac{M}{\rho}|\alpha|^N B_N+\cdots+\frac{M}{\rho^{N+1}}B_0\right)+\frac{M}{\rho^{N+1}}\right] \\
&= B_{N+1}.
\end{aligned}
$$

用数学归纳法能进一步证明：对一切 n，

$$|b_n| \leqslant B_n$$

成立. 可见，$\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ 是式(3.6.20)的优级数.

下面再证优级数 $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ 有一个正的收敛半径. 由式(3.6.24)可知，当 $n > N$ 时，有

$$B_n = \frac{1}{1-M|\alpha|^n}\left[\left(\frac{M}{\rho}|\alpha|^{n-1}B_{n-1}+\cdots+\frac{M}{\rho^n}B_0\right)+\frac{M}{\rho^n}\right].$$

由此，容易推出

$$
\begin{aligned}
&\rho(1-M|\alpha|^{n+1})B_{n+1} \\
&= M|\alpha|^n B_n+\left[\left(\frac{M}{\rho}|\alpha|^{n-1}B_{n-1}+\cdots+\frac{M}{\rho^n}B_0\right)+\frac{M}{\rho^n}\right] \\
&= M|\alpha|^n B_n+(1-M|\alpha|^n)B_n = B_n,
\end{aligned}
$$

即

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{1}{\rho(1-M|\alpha|^{n+1})}.$$

考虑到 $|\alpha|<1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_{n+1}}{B_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho(1-M|\alpha|^{n+1})} = \frac{1}{\rho}.$$

这就是说，$\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ 有收敛半径 $\rho > 0$.

综上所述，由引理 3.6.2 知，方程(3.6.9)存在唯一解析解

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，其收敛半径至少为 ρ. 考虑到 $\rho(0<\rho<R)$ 的任意性，定理得证.

附注 定理 3.6.2 还可以推广到函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}p_i(x)f(\alpha_i x)+q(x),$$

而方程(3.6.8)与(3.6.9)都是此方程的特例.

例 1 考察函数方程

$$f(x)=2f\left(\frac{1}{2}x\right)+3f\left(\frac{1}{3}x\right)+\frac{\sin x}{x} \tag{3.6.25}$$

的解析解. 这个方程属于方程(3.6.8)型的. 这里，$a_1=2,a_2=3$，$\alpha_1=\frac{1}{2},\alpha_2=\frac{1}{3}$. 容易验证方程(3.6.25)满足定理 3.6.1 的全部条件. 其中，$h(x)=\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$. 根据定理 3.6.1，方程(3.6.25)在$(-\infty,+\infty)$上有唯一解析解，设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，代入方程(3.6.25)，比较系数可求出

$$b_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\left[1-\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right]},$$

$$b_{2n+1}=0,$$

$$n=0,1,2,\cdots.$$

因而，方程(3.6.25)在$(-\infty,+\infty)$上的解析解为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!\left[1-\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right]}.$$

例 2 考察函数方程

$$f(x)=(1-ax)f(ax) \tag{3.6.26}$$

的解析解. 其中，$|a|<1,f(0)=1$.

方程(3.6.26)属于方程(3.6.9)型的,容易验证它满足定理3.6.2的全部条件.其中,$p(x)=1-ax$,$q(x)=0$都具有收敛半径$R=+\infty$.由定理3.6.2知,在$(-\infty,+\infty)$上,方程(3.6.26)存在唯一解析解.设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$,由于$f(0)=1$,故$b_0=1$,因此

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n.$$

将此代入式(3.6.26),比较系数可求出

$$b_n=\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(a-1)(a^2-1)\cdots(a^n-1)},\quad n=1,2,\cdots.$$

这样,就可得到方程(3.6.26)在$(-\infty,+\infty)$上的解析解

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(a-1)(a^2-1)\cdots(a^n-1)}x^n.$$

3) Schröder 函数方程的解析解

Schröder 函数方程

$$\varphi[f(x)]=s\varphi(x) \tag{3.6.27}$$

(其中,s,x是实的或复的,$s\neq0,1$;φ是未知函数)是在1870年研究连续迭代时出现的,是有重要意义的函数方程.G. Koenigs证明了方程(3.6.27)的解析解的存在唯一性,但是在$0<|s|<1$的情况下讨论的.

定理 3.6.3 (Koenigs) 设$0<|s|<1$,且在原点某邻域内有$f(x)=sx+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$,则公式

$$\varphi(x)=\eta\lim_{n\to\infty}s^{-n}f^n(x)$$

给出了方程(3.6.27)的单参数解析解,且$\eta=\varphi'(0)$.

证 由f的幂级数展开式知,存在正常数K与μ,使在原点的邻域内,

$$|f(x)-sx|\leqslant K|x|^{\mu+1}$$

成立.

由 $0<|s|<1$ 知,存在 q,使

$$|s|<q<|s|^{\frac{1}{\mu+1}}.$$

从而在 $U=\{x:|x|<r\}$ 上,有

$$|f(x)|\leqslant q|x|.$$

由此,对 $x\in U$,有

$$|f^n(x)|\leqslant rq^n.$$

根据 $|f(x)-sx|\leqslant K|x|^{\mu+1}$,对充分大的 n,

$$\begin{aligned}&|s^{-n-1}f^{n+1}(x)-s^{-n}f^n(x)|\\&=|s|^{-n-1}|f^{n+1}(x)-sf^n(x)|\\&\leqslant|s|^{-n-1}K|f^n(x)|^{\mu+1}\\&\leqslant\frac{Kr^{\mu+1}}{|s|}\left(\frac{q^{\mu+1}}{|s|}\right)^n\end{aligned}$$

成立.

又由 $|s|<q<|s|^{\frac{1}{\mu+1}}$,可知 $q^{\mu+1}/|s|<1$,因此 $\{s^{-n}f^n(x)\}$ 在 U 上一致收敛,故它的极限函数在 U 上是解析的. 因为在 $x=0$ 处的所有导数 $[s^{-n}f^n(x)]'=1$,故对于极限上述结述同样成立.

现在,令 $\varphi(x)$ 是方程(3.6.27)在原点一个邻域内的任意解析解,$\varphi_0(x)=\lim\limits_{n\to\infty}s^{-n}f^n(x)$,因而

$$1=\varphi_0'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_0(x)}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_0[f^n(x)]}{f^n(x)}.$$

由此,在原点的邻域内,$\varphi_0(x)\neq0$. 又因为 $\varphi(x)$ 和 $\varphi_0(x)$ 是方程(3.6.27)的解,故

$$\begin{aligned}\varphi'(0)&=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi[f^n(x)]}{f^n(x)}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\varphi(f^n(x))}{\varphi_0(f^n(x))}\cdot\frac{\varphi_0(f^n(x))}{f^n(x)}\right]=\frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)}.\end{aligned}$$

于是,满足 $\varphi'(0)=\eta$ 的 $\varphi(x)=\eta\lim\limits_{n\to\infty}s^{-n}f^n(x)$ 是方程(3.6.27)的

解析解. 证讫.

但是,

$$|s|=1 \tag{3.6.28}$$

的情况要比 $0<|s|<1$ 的情况复杂得多.

现在,我们设 s,x 均为复数,并设 f 是解析的,即可表示幂级数

$$f(x)=sx+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n \tag{3.6.29}$$

在原点的邻域内收敛,当然其系数是复的. 在这些假定下,C. L. Siegel给出了关于方程(3.6.27)解析解存在唯一性的漂亮结果. 首先,证明下面的引理.

引理 3.6.5 (Siegel) 假定 $|s|=1$,且 s 不是单位根,并存在正数 k,使

$$\ln|s^n-1|^{-1}\leqslant k\ln n,\quad n=2,3,\cdots, \tag{3.6.30}$$

则存在 $\delta>0$,使 $|s^n-1|^{-1}<(2n)^{\delta}$,$n=1,2,\cdots$. 另外,若定义

$$d_1=1,$$

$$d_n=|s^n-1|^{-1}\max\{d_{k_1}d_{k_2}\cdots d_{k_l}\},\quad n=2,3,\cdots$$

(max 是对所有的分拆 $n=k_1+\cdots+k_l$ 取的,其中,$0<k_1<\cdots<k_l$ 且都是整数,$l\geqslant 2$),则

$$d_n\leqslant N^{n-1}n^{-2\delta},\quad n=1,2,\cdots.$$

其中,$N=2^{5\delta+1}$.

附注 需要强调指出,当 $\varphi'(0)=\eta\neq 0$ 时,函数 $\varphi(x)$ 在原点的邻域内存在反函数 $\psi(x)=\varphi^{-1}(x)$. 这样,在原点的邻域内,方程(3.6.27)就等价于方程

$$\psi(sx)=f[\psi(x)]. \tag{3.6.31}$$

方程(3.6.31)称为 Poincaré **方程**. 显然,在讨论原点邻域的局部解析解时,Schröder 方程(3.6.27)与 Poincaré 方程(3.6.31)可以看成是等价的. 在下面定理的证明中,就是将方程(3.6.27)的解析

解存在性的证明归结为方程(3.6.31)的解析解存在性的证明的.

定理 3.6.4 设$|s|=1$,且s不是单位根,f如式(3.6.29)所设.若存$k>0$,使

$$\ln|s^n-1|^{-1}\leqslant k\ln n,\quad n=2,3,\cdots,$$

则在原点某邻域内,方程(3.6.27)存在唯一解析解.

证 因式(3.6.29)有正的收敛半径,由引理3.6.1知,存在$a>0$,使$|a_n|\leqslant a^{n-1}(n=2,3,\cdots)$.考虑方程(3.6.27)的等价方程(3.6.31),引进$\bar{\psi}(x)=a\psi(a^{-1}x)$和$\bar{f}(x)=af(a^{-1}x)$,由方程(3.6.31)得到$\bar{\psi}(sx)=\bar{f}[\bar{\psi}(x)]$,这仍是方程(3.6.31)形式的方程.但是,这里的$\bar{f}(x)$虽有形如(3.6.29)的展开式$\bar{f}(x)=sx+\sum_{n=2}^{\infty}\bar{a}_nx^n$,却有$|\bar{a}_n|=|a^{1-n}\cdot a_n|\leqslant 1$.因此,我们不妨假设$f$的展开式(3.6.29)中总有

$$|a_n|\leqslant 1,\quad n=2,3,\cdots. \tag{3.6.32}$$

我们先求方程(3.6.31)的形式幂级数解.设方程(3.6.31)的形式幂级数解为

$$\psi(x)=b_1x+\sum_{n=2}^{\infty}b_nx^n \tag{3.6.33}$$

(易知$b_1=1$),并代入方程(3.6.31),整理后有

$$\psi(sx)-s\psi(x)=f[\psi(x)]-s\psi(x),$$

考虑到式(3.6.29),有

$$\sum_{n=2}^{\infty}(s^n-s)b_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\Big(b_1x+\sum_{m=2}^{\infty}b_mx^m\Big)^n,$$

比较系数,可得

$$b_n=(s^n-s)^{-1}\sum_{n=k_1+k_2+\cdots+k_l}a_lb_{k_1}b_{k_2}\cdots b_{k_l}. \tag{3.6.34}$$

其中,$0<k_l\leqslant\cdots\leqslant k_1$均为整数,且$l\geqslant 2$.以下求和都有这个假定.

现在来构成式(3.6.33)的优级数.考虑

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n,$$

其中，

$$u_1=1,\quad u_n=s_{n-1}\sum_{n=k_1+k_2+\cdots+k_l}u_{k_1}u_{k_2}\cdots u_{k_l},\tag{3.6.35}$$

这里，$s_{n-1}=|s^{n-1}-1|^{-1}$.

利用归纳法来证明：

$$|b_n|\leqslant u_n.\tag{3.6.36}$$

当 $n=1$ 时，$b_1=u_1=1$. 若对于 $2,3,\cdots,n-1$，不等式(3.6.36)都成立，考虑到 $|s^n-s|^{-1}=s_{n-1}$，由式(3.6.34)与(3.6.35)得

$$|b_n|\leqslant s_{n-1}\sum_{n=k_1+k_2+\cdots+k_l}u_{k_1}u_{k_2}\cdots u_{k_l}=u_n.$$

这便证得了式(3.6.36).

为了证明幂级数 $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n$ 有正的收敛半径，考察由方程

$$\Phi(x)=x+\frac{[\Phi(x)]^2}{1-\Phi(x)}=x+[\Phi(x)]^2+[\Phi(x)]^3+\cdots\tag{3.6.37}$$

定义的函数 Φ.

设

$$\Phi(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}v_nx^n,$$

代入方程(3.6.37)，得系数 v_n 的递推公式

$$v_1=1,\quad v_n=\sum_{n=k_1+k_2\cdots+k_l}v_{k_1}v_{k_2}\cdots v_{k_l},\quad n=2,3,\cdots.$$

容易证明不等式

$$u_n\leqslant v_nd_n,\quad n=1,2,\cdots$$

成立. 其中，d_n 如引理 3.6.1 所规定. 从方程(3.6.37)可计算出 $\Phi(x)=\frac{1}{4}[1+x-(1-6x+x^2)^{\frac{1}{2}}]$，因此，$\Phi(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}v_nx^n$

对于$|x|<3-2\sqrt{2}$收敛. 根据引理3.6.1可知,存在常数$A>0$,使$|v_n|\leqslant A^n(n=1,2,\cdots)$. 再根据引理3.6.5,就可得到

$$u_n\leqslant A^nN^{n-1}n^{-2\delta}.$$

这表明$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n$至少对$|x|<(AN)^{-1}$收敛. 最后,根据引理3.6.2知,式(3.6.33)也至少对$|x|<(AN)^{-1}$收敛. 证讫.

附注 这个定理的证明技巧性特别强. 为了证明优级数有正的收敛半径,又引进一个由已知函数方程所确定的收敛幂级数,并应用了引理3.6.1.

4) 非齐次 Poincaré 方程的解析解

上面已经证明了 Schröder 方程(3.6.27)的解析解的存在性. 事实上,也证明了它的等价方程 Poincaré 方程的解析解的存在性.

我们再来讨论非齐次 Poincaré 函数方程

$$f[\psi(x)]=\psi(ax)+F(x) \tag{3.6.38}$$

的局部解析解的存在性问题. 其中,f,F是已知函数;ψ是未知函数;x是实的或复的变数;α是实的或复的常数. 我们仅讨论$\psi(0)=0,\psi'(0)=\eta\in(-\infty,+\infty)$情况下的解析解的存在唯一性,可得到如下的定理.

定理3.6.5 若函数方程(3.6.38)满足

(ⅰ) $f(0)=0,f'(0)=\alpha,|\alpha|\geqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,且$f$是解析的,其展开式

$$f(x)=ax+\sum_{n=2}^{\infty}f_nx^n \tag{3.6.39}$$

在原点某邻域内收敛;

(ⅱ) $F(0)=F'(0)=0$,且在原点某邻域内有

$$F(x)=\sum_{n=2}^{\infty}F_n x^n, \tag{3.6.40}$$

则方程(3.6.38)在原点某邻域内存在形如 $\psi(x)=\eta(x)+\sum_{n=2}^{\infty}b_n x^n$ 的唯一单参数族解析解.

证 因为式(3.6.39)有正的收敛半径,由引理 3.6.1 知,存在 $p>0$,使 $|f_n|\leqslant p^{n-1}(n=2,3,\cdots)$. 今引入新函数 φ 和 g,使 $\psi(x)=\varphi(px)/p$ 与 $f(x)=g(px)/p$,将此代入方程(3.6.38),并以 x 代 px,便得到方程(3.6.38)的同类方程 $g[\varphi(x)]=\varphi(\alpha x)+pF(\frac{x}{p})$. 这样,我们从 $g(x)=pf(\frac{x}{p})$ 可得展开式

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n x^n=\alpha x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n}{p^{n-1}}x^n.$$

显然

$$|g_n|\leqslant\frac{|f_n|}{p^{n-1}}\leqslant 1,\quad n=2,3,\cdots.$$

由此,不失一般性,可假定

$$|f_n|\leqslant 1,\quad n=2,3,\cdots. \tag{3.6.41}$$

又由条件(ⅱ),必存在 $M>0$,对任意 $r(0<r<R)$,有

$$|F_n|\leqslant\frac{M}{r^n},\quad n=2,3,\cdots. \tag{3.6.42}$$

设方程(3.6.38)具有幂级数形式解

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n. \tag{3.6.43}$$

将式(3.6.39),(3.6.40)与(3.6.43)代入方程(3.6.38),得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_m=n\\ m=1,2,\cdots,n}}f_m b_{l_1}\cdots b_{l_m}\Big)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\alpha^n+F_n)x^n.$$

这里认为 $f_1=\alpha,F_1=0$. 比较系数,得

$$\alpha b_1=b_1\alpha,$$

$$(\alpha^n-\alpha)b_n=\sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_m=n\\ m=2,3,\cdots,n}} f_m b_{l_1}b_{l_2}\cdots b_{l_m}-F_n,\quad n=2,3,\cdots.$$

这里，可取 $b_1=\eta\in(-\infty,+\infty)$，于是，式(3.6.43)的其他系数 $b_2,b_3,\cdots$ 可由上面的递推关系唯一地确定. 因此，方程(3.6.38)有唯一单参数族形式解

$$\psi(x)=\eta x+\sum_{n=2}^{\infty}b_n x^n. \tag{3.6.44}$$

现在，我们再来考察由方程

$$G(x)=\eta x+\frac{[G(x)]^2}{1-G(x)}+\frac{Mx^2}{r^2-rx}=\eta x+\sum_{n=2}^{\infty}[G(x)]^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{M}{r^n}x^n \tag{3.6.45}$$

所确定的函数

$$G(x)=\frac{1}{4}\left\{1+\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx}-\left[1-6\left(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx}\right)+\left(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

因为当 $x\to 0$ 时，有

$$6\left(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx}\right)-\left(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx}\right)^2=o(1),$$

所以存在 $\delta>0$，当 $|x|<\delta$ 时，有

$$\left|6\left(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx}\right)-\left(\eta x+\frac{Mx^2}{r^2-rx}\right)^2\right|<1.$$

于是，$G(x)$ 至少在 $|x|<\delta$ 上是解析的. 若令 $G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n x^n$，代入式(3.6.45)，可得

$$v_1=\eta,$$

$$v_n=\sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_m=n\\ m=2,3,\cdots,n}} v_{l_1}v_{l_2}\cdots v_{l_m}+\frac{M}{r^n}. \tag{3.6.46}$$

不言而喻，由式(3.6.46)所确定的系数的幂级数 $G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n x^n$ 至少在 $|x|<\delta$ 上收敛.

最后，我们证明：

$$|b_n|\leqslant v_n,\quad n=1,2,\cdots. \tag{3.6.47}$$

事实上，当 $n=1$ 时，式(3.6.47)显然成立. 假设对 $2,3,\cdots,n-1$ 式(3.6.47)成立，注意到条件(ⅰ)和式(3.6.41)，(3.6.42)以及 b_n,v_n 的递推式，有

$$\begin{aligned}|b_n|&\leqslant|\alpha|\cdot|\alpha|^{n-1}-1|\cdot|b_n|\leqslant|\alpha^n-\alpha|\cdot|b_n|\\&\leqslant\sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_m=n\\m=2,3,\cdots,n}}|b_{l_1}||B_{l_2}|\cdots|b_{l_m}|+|F_n|\\&\leqslant\sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_m=n\\m=2,3,\cdots,n}}v_{l_1}\cdots v_{l_m}+\frac{M}{r^n}=v_n.\end{aligned}$$

这就是说，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n x^n$ 是级数(3.6.44)的优级数. 因此，式(3.6.44)是方程(3.6.38)在 $|x|<\delta$ 内的唯一单参数族的解析解. 定理证讫.

*5) 不变曲线方程的解析解

设有一个平面映射 T：

$$\bar{x}=\varphi(x,y),\quad \bar{y}=g(x,y),$$

若 $y=f(x)$是平面映射 T 的不变曲线，则有 $\bar{y}=f(\bar{x})$. 从而得到不变曲线方程

$$f[\varphi(x,f(x))]=g[x,f(x)].$$

这显然是一种迭代函数方程，它与平面不变曲线的关系十分紧密. 近年来，对平面不变曲线的函数方程解析解的研究有着许多新的结果.

下面先来介绍不变曲线方程

$$\varphi[z+\varphi(z)]=\rho[\varphi(z)]. \tag{3.6.48}$$

其中，φ 是未知函数，ρ 是已知复变量复值函数，且在原点某邻域内

是解析的，$\rho(0)=0$，并记 $\rho'(0)=\alpha$.

考虑关于 α 的三个条件：

(ⅰ) $|\alpha|\geqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$；

(ⅱ) $0<|\alpha|<1$；

(ⅲ) $|\alpha|=1$，α 不是单位根，且存在正常数 k，使对于 $n=2,3,\cdots$，$\ln|\alpha^n-1|^{-1}\leqslant k\ln n$ 成立.

定理 3.6.6 设条件(ⅰ)～(ⅲ)中有一个成立，则方程(3.6.48)在原点的某邻域内就有一个解析解.

显然，若 f 是方程

$$f(\alpha^2 z)-f(\alpha z)=\rho[f(\alpha z)-f(z)] \tag{3.6.49}$$

的一个解析解，且 $f'(0)\neq 0$，则函数

$$\varphi(z)=f[\alpha f^{-1}(z)]-z$$

就是原点某邻域内方程(3.6.48)的一个解析解. 因此，定理3.6.6的结论可直接从下面的引理得到.

引理 3.6.6 假设条件(ⅰ)～(ⅲ)中有一个成立，则在(ⅰ)与(ⅱ)情况下对任意 $\eta\in\mathbf{C}$，在(ⅲ)的情况下对 $\eta=1$，方程(3.6.49)在原点某邻域内存在一个解析解 f，使 $f(0)=0$，$f'(0)=\eta$.

证 固定一个 $\eta\in\mathbf{C}$. 若 $\eta=0$，则 $f(z)=0$ 满足论断要求. 因此，假设 $\eta\neq 0$，另外，$\eta=1$ 属于情况(ⅲ). 设

$$\rho(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n,\quad c_1=\alpha. \tag{3.6.50}$$

因 $\rho(z)$ 是原点某邻域上的解析函数，故存在 $\beta>0$，使 $|c_n|\leqslant\beta^{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$. 注意到方程(3.6.49)对于变换 $f(z)=\overline{f}(\beta z)/\beta$ 和 $\rho(z)=\overline{\rho}(\beta z)/\beta$ 是不变的，因此，不失一般性，我们总可以假定

$$|c_n|\leqslant 1,\quad n=1,2,\cdots. \tag{3.6.51}$$

再设

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n \tag{3.6.52}$$

是方程(3.6.49)的形式幂级数解. 将式(3.6.50)和(3.6.52)代入方程(3.6.49),并比较系数,可得到

$$\begin{cases}[\alpha^2-(1+c_1)\alpha+c_1]b_1=0,\\ [\alpha^{2n}-(1+c_1)\alpha^n+c_1]b_n=\sum\limits_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_t=n\\ t=2,3,\cdots,n}} c_t\prod\limits_{k=1}^{t}(\alpha^{l_k}-1)b_{l_k},\quad n=2,3,\cdots.\end{cases}$$

(3.6.53)

注意到 $c_1=\alpha$,有 $\alpha^2-(1+c_1)\alpha+c_1=0$. 于是,我们可以选取 $b_1=\eta$,由式(3.6.53)得到关系式

$$\begin{cases}a_1=\eta\\ (\alpha^n-\alpha)a_n=\sum\limits_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_t=n\\ t=2,3,\cdots,n}} c_t a_{l_1}a_{l_2}\cdots a_{l_t},\quad n=2,3,\cdots.\end{cases}$$

(3.6.54)

其中,$a_1=b_1=\eta$,且

$$a_n=(\alpha^n-1)b_n,\quad n=2,3,\cdots. \tag{3.6.55}$$

易见,$a_n(n=1,2,\cdots)$ 可由式(3.6.54)唯一地确定. 下面我们来证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 在原点的某邻域内是收敛的.

当(ⅰ)或(ⅱ)成立时,我们置 $q=\gamma=1$. 否则,当 $0<|\alpha|<1$ 时,取 $\gamma\in(0,|\alpha|)$. 我们能找到一个正整数 q,使对于每一个 $n\geqslant q$,都有 $|\alpha|^n\leqslant|\alpha|-\gamma$. 设

$$R(z,\omega)=\omega-|\eta|z-\sum_{n=2}^{q}|a_n|z^n-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\omega^{q+1}}{1-\omega},$$

z 与 ω 在原点某邻域内. 因 $R(0,0)=0$,$R'_{\omega}(0,0)=1\neq0$,且 $R'_z(0,0)=-|\eta|$,故在原点某邻域内存在一个解析函数 $\omega(z)$ 满足等式 $R[z,\omega(z)]=0$,且使 $\omega(0)=0$,$\omega'(0)=|\eta|$. 也就是说

$$\omega(z)=|\eta|z+\sum_{n=2}^{q}|a_n|z^n+\frac{1}{\gamma}\frac{[\omega(z)]^{q+1}}{1-\omega(z)}.$$

于是，当设 $\omega(z)=|\eta|z+\sum_{n=2}^{q}u_nz^n$ 时，我们能得到递推公式

$$u_n=\begin{cases}|a_n|, & 2\leqslant n\leqslant q\\ \dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_t=n\\ t=2,3,\cdots,n}}u_{l_1}u_{l_2}\cdots u_{l_t}, & n>q.\end{cases}\tag{3.6.56}$$

在情况(ⅰ)下，$|\alpha^n-\alpha|\geqslant|\alpha|^n-|\alpha|\geqslant|\alpha|^2-|\alpha|\geqslant 1(n=2,3,\cdots)$；而在情况(ⅱ)下，$|\alpha^n-\alpha|\geqslant|\alpha|-|\alpha|^n>\gamma(n=q+1,q+2,\cdots)$. 这样，利用归纳法和不等式(3.6.51)，可以推出 $|a_n|\leqslant u_n(n=1,2,\cdots)$. 因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$（参见式(3.6.55)）都在原点某邻域内收敛.

现在考察情况(ⅲ). 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nz^n$ 在原点某邻域内收敛，故存在 $A>0$，使 $u_n\leqslant A^n(n=1,2,\cdots)$，依归纳法，由式(3.6.54)和(3.6.56)可得到不等式

$$|a_n|\leqslant u_nd_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

其中，d_n 如引理 3.6.5 所定义. 由引理 3.6.5，可知存在正数 δ 和 N，使 $|a_n|\leqslant A^nN^{n-1}n^{-2\delta}(n=1,2,\cdots)$，且对 $n=1,2,\cdots$，有

$$|b_n|=|\alpha^n-\alpha|^{-1}|a_n|\leqslant[2(n-1)]^{\delta}A^nN^{n-1}n^{-2\delta}.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 也在原点的某邻域内收敛. 至此，这个定理得证.

现在，我们再来研究不变曲线函数方程

$$f[p(z)+g(f(z))]=h[f(z)],\quad z\in\mathbf{C}\tag{3.6.57}$$

解析解的存在性. 其中，f 是未知的复函数；p，g 和 h 是已知的复函数.

令

$$f(z)=q^{-1}[g(\beta g^{-1}(z))-p(z)],\tag{3.6.58}$$

于是得到方程(3.6.57)的辅助方程

$$q^{-1}[g(\beta^2 z) - p(g(\beta z))] = h[q^{-1}(g(\beta z) - p(g(z)))]. \tag{3.6.59}$$

若记

$$\varphi(z) = q^{-1}[g(\beta z) - p(g(z))], \tag{3.6.60}$$

由方程(3.6.59)和(3.6.60),我们得到 Poincaré 方程

$$\varphi(\beta z) = h[\varphi(z)], \quad z \in \mathbf{C}. \tag{3.6.61}$$

为了研究方程(3.6.57)解析解的存在性,我们先讨论由其辅助方程转化来的方程(3.6.61)解析解的存在性.为此,我们作如下的假设:

(ⅰ) $p(z)$和$h(z)$在原点邻域内解析,且 $p(0)=h(0)=0$, $p'(0)=r\neq 0$,且$|r|\neq 1$,$h'(0)=s\neq 0$;

(ⅱ) $q(z)$也是在原点邻域内解析,且是可逆的,$q(0)=0$, $q'(0)=t\neq 0$;

(ⅲ) $\beta=s$;

(ⅳ) $r\neq s^n (n=1,2,\cdots)$.

关于β,我们分两种情况进行讨论:

① $|\beta|=1$;

② $|\beta|=1$,但β不是单位根.

我们来证明下面的定理:

定理 3.6.7 假定(ⅰ),(ⅱ)及①成立,则对任意 $\eta\in\mathbf{C}$,方程(3.6.61)在原点某邻域内存在唯一解析解 $\varphi(z)$,使 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=\eta$.

证 当$\eta=0$时,(3.6.61)有一明显解.

当$\eta\neq 0$时,由(ⅰ)可假设$h(z)$的幂级数展开式为

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n, \quad h_1 = h'(0) = s \neq 0, \tag{3.6.62}$$

且存在正数θ,使$|h_n|\leqslant\theta^{n-1}$,与定理 3.6.4 的证明相同,有

$$|h_n| \leqslant 1, \quad n = 2,3,\cdots. \tag{3.6.63}$$

设

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n, \tag{3.6.64}$$

将式(3.6.62)与(3.6.64)代入(3.6.61),得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{L(m)=n\\ m=1,2,\cdots,n}}h_mb_{l_1}b_{l_2}\cdots b_{l_m}\Big)z^n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\beta^nz^n.$$

其中,$L(m)=l_1+l_2+\cdots+l_m$. 比较系数,可得

$$sb_1=\beta b_1 \tag{3.6.65}$$

和

$$(\beta^n-s)b_n=\sum_{\substack{L(m)=n\\ m=2,3,\cdots,n}}h_mb_{l_1}b_{l_2}\cdots b_{l_m},\quad n=2,3,\cdots. \tag{3.6.66}$$

考虑到$|\beta|\neq1$,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta^n-\beta}=\begin{cases}0, & |\beta|>1,\\ -\dfrac{1}{\beta}, & 0<|\beta|<1,\end{cases}$$

故存在$M>0$,使$|(\beta^n-\beta)^{-1}|\leqslant M$. 据此及式(3.6.63)和(3.6.66),有

$$|b_n|\leqslant M\sum_{\substack{L(m)=n\\ m=2,3,\cdots,n}}|b_{l_1}||b_{l_2}|\cdots|b_{l_m}|,\quad n=2,3,\cdots.$$

如果我们定义$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$B_1=|\eta|,$$

$$B_n=M\sum_{\substack{L(m)=n\\ m=2,3,\cdots,n}}B_{l_1}B_{l_2}\cdots B_{l_m},\quad n=2,3,\cdots.$$

容易证明:$|b_n|\leqslant B_n,n=1,2,\cdots$. 这表明$\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^n$是$\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$的优级数.

定义

$$B(z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^n, \tag{3.6.67}$$

因 $B(0)=0$，故存在 $\sigma_1>0$，使 $|B(z)|<1(|z|<\sigma_1)$. 于是

$$\begin{aligned}B(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^n=|\eta|z+\sum_{n=2}^{\infty}B_nz^n\\&=|\eta|z+M\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{L(m)=n\\m=2,3,\cdots,n}}B_{l_1}B_{l_2}\cdots B_{l_m}\Big)z^n\\&=|\eta|z+M\sum_{n=2}^{\infty}[B(z)]^n\\&=|\eta|z+\frac{M[B(z)]^2}{1-B(z)},\end{aligned}$$

即

$$(1+M)[B(z)]^2-(1+|\eta|z)B(z)+|\eta|z=0,$$

因 $B(0)=0$，从而有

$$B(z)=\frac{1}{2(1+M)}\Big[1+|\eta|z-\sqrt{1+|\eta|^2z^2-2(2M+1)|\eta|z}\Big].$$

当 $z\to0$ 时，有 $|\eta|^2z^2-2(2M+1)|\eta|z=o(1)$，故存在 $\sigma_2>0$，当 $|z|<\sigma_2$ 时，使 $||\eta|^2z^2-2(2M+1)|\eta|z|<1$.

综上所述，对 $\sigma=\min\{\sigma_1,\sigma_2\}$，当 $|z|<\sigma$ 时，式(3.6.67)收敛. 因此，式(3.6.64)有一个正的收敛半径. 定理 3.6.7 得证.

定理 3.6.8 假定(ⅰ)，(ⅱ)及②成立，且 $\lg|\beta^n-1|^{-1}\leqslant T\lg n(n=2,3,\cdots;T$ 为正常数)成立，则方程(3.6.61)在原点某邻域内存在一个解析解 $\varphi(z)$，且它满足 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\eta$.

证 当 $\eta=0$ 时，方程(3.6.61)有一个明显解. 当 $\eta\neq0$ 时，如定理3.6.7的证明，方程(3.6.61)有形式幂级数解(3.6.64)，其系数由式(3.6.65)和(3.6.66)给出. 由式(3.6.63)和(3.6.66)可得

$$|b_n|\leqslant|\beta^{n-1}-1|^{-1}\sum_{\substack{L(m)=n\\m=2,3,\cdots,n}}|b_{l_1}||b_{l_2}|\cdots|b_{l_m}|,\quad n=2,3,\cdots.$$

再利用著名的 Siegel 引理(引理 3.6.5)，即可证明定理 3.6.8 的

结论.

定理 3.6.9 假设条件(ⅰ)~(ⅳ)成立,且情况①或②成立,则方程(3.6.60)的变形

$$g(\beta z)-p[g(z)]=q[\varphi(z)],\quad z\in\mathbf{C} \tag{3.6.60'}$$

在原点某邻域内有一个解析解 $g(z)$,且它满足 $g(0)=0,g'(0)=\dfrac{t\eta}{s-r}\neq 0$.

证 在本定理的条件下,由定理 3.6.7 和定理 3.6.8 可知,方程(3.6.61)在原点邻域内有解析解(3.6.64),即 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n$,且它满足 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\eta\neq 0$,因此存在 $\rho>0$,使

$$|b_n|\leqslant\rho^n. \tag{3.6.68}$$

由(ⅰ)和(ⅱ),有幂级数展开式

$$p(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n,\quad p_1=r\neq 0,\quad |r|\neq 1; \tag{3.6.69}$$

$$q(z)=\sum_{n=1}^{\infty}q_nz^n,\quad q_1=t\neq 0. \tag{3.6.70}$$

它们在原点邻域内收敛,且可一般地假设

$$|p_n|\leqslant 1,\quad |q_n|\leqslant 1,\quad n=2,3,\cdots. \tag{3.6.71}$$

设方程(3.6.60′)的形式解为

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n. \tag{3.6.72}$$

将式(3.6.64),(3.6.69),(3.6.70)和(30.6.72)代入(3.6.60′),得

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\beta^nz^n-\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{L(m)=n\\ m=1,2,\cdots,n}}p_mc_{l_1}c_{l_2}\cdots c_{l_m}\Big)z^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{L(m)=n\\ m=1,2,\cdots,n}}q_mb_{l_1}b_{l_2}\cdots b_{l_m}\Big)z^n.$$

比较系数,考虑到 $\beta=s\neq 0,b_1=\eta\neq 0$,有

$$c_1 s = rc_1 + \eta, \tag{3.6.73}$$

$$(s^n - r)c_n = \sum_{\substack{L(m)=n \\ m=2,3,\cdots,n}} p_m c_{l_1} c_{l_2} \cdots c_{l_m} + \sum_{\substack{L(m)=n \\ m=1,2,\cdots,n}} q_m b_{l_1} b_{l_2} \cdots b_{l_m}, \quad n = 2,3,\cdots. \tag{3.6.74}$$

由式(3.6.73)可得 $c_1 = \dfrac{t\eta}{s-r}$，再由式(3.6.74)可依次推出 c_n ($n=2,3,\cdots$)，从而得到式(3.6.60′)的形式解(3.6.72). 下面证明式(3.6.72)有正的收敛半径.

因

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s^n - r} = \begin{cases} -\dfrac{1}{r}, & 0 < |s| < 1, \\ 0, & |s| > 1, \end{cases}$$

因此存在 $k_1 > 0$，使

$$|(s^n - r)^{-1}| \leqslant k_1, \quad |s| \neq 1.$$

再由(ⅰ)，有

$$|(s^n - r)^{-1}| \leqslant |1 - |r||^{-1}, \quad |s| = 1.$$

当设 $K = \max(k_1, |1-|r||^{-1})$ 时，总有

$$|(s^n - r)^{-1}| \leqslant K, \quad |s| \neq 0.$$

这样，从式(3.6.68)和(3.6.74)可估算出

$$|c_n| \leqslant K \sum_{\substack{L(m)=n \\ m=2,3,\cdots,n}} |c_{l_1}||c_{l_2}| \cdots |c_{l_m}| + K \sum_{\substack{L(m)=n \\ m=1,2,\cdots,n}} \rho^{l_1}\rho^{l_2}\cdots\rho^{l_m}, \quad n = 2,3,\cdots. \tag{3.6.75}$$

现在，定义一个 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$：

$$C_1 = \left|\frac{t\eta}{s-r}\right|,$$

$$C_n = K \sum_{\substack{L(m)=n \\ m=2,3,\cdots,n}} C_{l_1} C_{l_2} \cdots C_{l_m} + K \sum_{\substack{L(m)=n \\ m=1,2,\cdots,n}} \rho^{l_1}\rho^{l_2}\cdots\rho^{l_m}. \tag{3.6.76}$$

由归纳法，不难证明：

$$|c_n| \leqslant C_n, \quad n=1,2,\cdots.$$

定义 $C(z)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$，它就是式(3.6.72)的优级数.

接下来证明 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 有正的收敛半径. 可以推出

$$C(z)=\left|\frac{t\eta}{s-r}\right| z+K\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{L(m)=n\\ m=2,3,\cdots,n}} C_{l_1}C_{l_2}\cdots C_{l_m}\Big)z^n+$$

$$K\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{L(m)=n\\ m=1,2,\cdots,n}} \rho^{l_1}\rho^{l_2}\cdots\rho^{l_m}\Big)z^n$$

$$=\left|\frac{t\eta}{s-r}\right| z+K\frac{[C(z)]^2}{1-C(z)}+K\frac{\rho z}{1-2\rho z}-K\rho z.$$

其中，$|z|<\frac{1}{2\rho}$.

下面研究隐函数方程

$$F(z,C)=C(z)-\left|\frac{t\eta}{s-r}\right| z-\frac{K[C(z)]^2}{1-C(z)}-\frac{K\rho z}{1-2\rho z}+K\rho z=0.$$

显然，F 在原点邻域内解析，又 $F(0,0)=0$，$F'_C(0,0)=1$，由隐函数定理，我们知 $C(z)$ 在原点某邻域内解析，即具有正的收敛半径. 定理证讫.

最后，我们来叙述开始时提到的一个平面映射不变曲线函数方程(3.6.57)的解析解存在性定理.

定理 3.6.10 设定理 3.6.7 与定理 3.6.9 或定理 3.6.8 与定理 3.6.9 的条件得到满足，则方程(3.6.57)存在形如

$$f(z)=q^{-1}[g(\beta g^{-1}(z))-p(z)] \tag{3.6.77}$$

的解析解，它在原点邻域内解析. 其中 $g(z)$ 是方程(3.6.60′)的一个解析解.

证 根据定理 3.6.7 与定理 3.6.9 或定理 3.6.8 与定理

3.6.9，我们已找到方程(3.6.60′)的形如(3.6.72)的解析解$g(z)$，其系数数列$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$还依赖于方程(3.6.61)的解析解的系数$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. 因$g'(0)\neq 0$，故$g^{-1}(z)$存在，且在原点邻域内解析，容易验证式(3.6.77)满足方程(3.6.57)，因为

$$\begin{aligned}
&f[p(z)+q(f(z))]\\
&=f[g(\beta g^{-1}(z))]=q^{-1}[g(\beta^2 g^{-1}(z))-p(g(\beta g^{-1}(z)))]\\
&=\varphi[\beta g^{-1}(z)]=h[\varphi(g^{-1}(z))]\\
&=h[q^{-1}(g(\beta g^{-1}(z))-p(g(g^{-1}(z))))]\\
&=h[q^{-1}(g(\beta g^{-1}(z))-p(z))]=h(f(z)).
\end{aligned}$$

这就是说，式(3.6.77)是方程(3.6.58)在原点邻域内一个解析解. 证讫.

*6) 迭代微分方程的解析解

应该指出，不仅函数方程有解析解的存在性问题，而且微分方程(包括所谓的迭代微分方程)也有解析解的存在性问题. 近年来，关于迭代微分方程解析解问题的结果不断涌现. 下面举一个例子来展示这方面的工作情况.

现在来考察二阶迭代泛函微分方程

$$x''(z)=\sum_{j=0}^{m}p_j x^j(z). \tag{3.6.78}$$

其中，正整数$m\geqslant 2$；$p_j(j=1,2,\cdots)$为不全为零的复常数；z为复变数；$x^j(z)$表示未知函数$x(z)$的j次迭代. 我们用幂级数法在复域内给出方程(3.6.78)满足初始条件

$$x(\alpha)=\alpha,\quad x'(\alpha)=\alpha \tag{3.6.79}$$

或

$$x(0)=0,\quad x'(0)=\alpha \tag{3.6.79′}$$

(其中，α为非零复数)的解析解.

关于非零复数α，我们假定它满足条件：

(ⅰ) $0<|\alpha|<1$；

或

(ⅱ) $|\alpha|=1$,且存在常数 $K>0$,使得

$$\ln s_n \leqslant K\ln n \quad (n=2,3,\cdots).$$

其中,$s_n=|\alpha^n-1|^{-1}$.

容易看出,上面的不等式能保证 α 不是单位根.

下面分别在这两种情况下研究方程(3.6.78)的解析解的存在性.

为讨论方程(3.6.78)的解析解,我们首先要考察一类相关的二阶泛函微分方程

$$\alpha^2 y''(\alpha z)y'(z)-\alpha y'(\alpha z)y''(z)=[y'(z)]^3\sum_{j=0}^{m}p_j y(\alpha^j z) \tag{3.6.80}$$

满足初始条件

$$y(0)=\alpha,\quad y'(0)=\eta \tag{3.6.81}$$

或

$$y(0)=0,\quad y'(0)=\eta \tag{3.6.81'}$$

(其中,η 为给定复常数)的解析解的存在性问题.

在情况(ⅰ)下讨论方程(3.6.80)的解析解的存在性,可得到下面两个引理.

引理 3.6.7 若复数 α 满足条件(ⅰ),则对任意复数 $\eta\neq 0$,方程(3.6.80)在原点某邻域内存在符合初始条件(3.6.81)的解析解

$$y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=\alpha+\eta z+\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n. \tag{3.6.82}$$

其中,系数 $b_n(n=2,3,\cdots)$ 由递推公式

$$(n+2)(\alpha^{n+2}-\alpha)b_{n+2}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(i+1)(k+1)}{n-k+1}\Big[\sum_{j=0}^{m}p_j\alpha^{j(n-k-i)}\Big]b_{k+1}B_{i+1}b_{n-k-i} \tag{3.6.83}$$

给出.

证 将方程(3.6.80)变为

$$\frac{\alpha y''(\alpha z)y'(z)-y'(\alpha z)y''(z)}{[y'(z)]^2}=\frac{1}{\alpha}y'(z)\sum_{j=0}^{m}p_j y(\alpha^j z)$$

或

$$\left[\frac{y'(\alpha z)}{y'(z)}\right]'=\frac{1}{\alpha}y'(z)\sum_{j=0}^{m}p_j y(\alpha^j z).$$

考虑到 $y'(0)=\eta\neq 0$,对上式积分可得方程(3.6.80)的等价方程

$$y'(\alpha z)=y'(z)+\frac{1}{\alpha}y'(z)\int_0^z y'(s)\sum_{j=0}^{m}p_j y(\alpha^j s)\mathrm{d}s. \quad (3.6.84)$$

将 $y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ 代入方程(3.6.84),右端的积分变为

$$\int_0^z y'(s)\sum_{j=0}^{m}p_j y(\alpha^j s)\mathrm{d}s=\sum_{j=0}^{m}\int_0^z y'(s)y(\alpha^j s)\mathrm{d}s$$

$$=\sum_{j=0}^{m}p_j\int_0^z\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}s^n\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\alpha^{jn}s^n\right)\mathrm{d}s$$

$$=\sum_{j=0}^{m}p_j\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{i+1}{n+1}b_{i+1}b_{n-i}\alpha^{j(n-i)}\right]z^{n+1},$$

因而

$$\frac{1}{\alpha}y'(z)\int_0^z y'(s)\sum_{j=0}^{m}p_j y(\alpha^j s)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{m}p_j\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}z^n\right]\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i+1}{n+1}b_{i+1}b_{n-i}\alpha^{j(n-i)}\right]z^{n+1}\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}p_j\left\{b_1^2 z+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(i+1)(k+1)}{n-k+1}b_{k+1}b_{i+1}b_{n-k-i}\alpha^{j(n-k-i)}\right]z^{n+1}\right\}.$$

于是,方程(3.6.84)变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}\alpha^n z^n=b_1+\left[2b_2+\left(\sum_{j=0}^{m}p_j\right)b_1^2\right]z+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+2)b_{n+2}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(i+1)(k+1)}{n-k+1}b_{k+1}b_{i+1}b_{n-k-i}\sum_{j=0}^{m}p_j\alpha^{j(n-k-i)}\right]\right\}z^{n+1}.$$

比较系数得 $b_1=b_1$ 及式(3.6.83)成立. 为满足初始条件(3.6.81),应取 $b_0=\alpha, b_1=y'(0)=\eta\neq 0$,且由递推公式(3.6.83)可以确定 $b_n(n=2,3,\cdots)$. 这样,式(3.6.82)就是方程(3.6.80)的形式幂级数解. 现在,只需证明幂级数(3.6.82)有正的收敛半径. 在情况(ⅰ)下,考虑到 $0\leqslant k\leqslant n, 0\leqslant i\leqslant n-k$,不难看到对一切 n,有

$$\left|\frac{(i+1)(k+1)}{(n+2)(n-k+1)(\alpha^{n+2}-\alpha)}\sum_{j=0}^{m}p_j\alpha^{j(n-k-i)}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|\alpha|-|\alpha|^{n+2}}\left(\sum_{j=0}^{m}|p_j|\right).$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|\alpha|-|\alpha|^{n+2}}=\dfrac{1}{|\alpha|}$,故存在正常数 M,使对一切 n,

$$\left|\frac{(i+1)(k+1)}{(n+2)(n-k+1)(\alpha^{n+2}-\alpha)}\sum_{j=0}^{m}p_j\alpha^{j(n-k-i)}\right|\leqslant M \tag{3.6.85}$$

成立.

今作序列 $\{h_n\}$:

$$\begin{cases}h_0=|\alpha|,\\ h_1=|\eta|,\\ h_{n+2}=M\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-k}h_{k+1}h_{i+1}h_{n-k-i}\right).\end{cases} \tag{3.6.86}$$

由式(3.6.83),(3.6.85)和式(3.6.86),利用数学归纳法易证:对一切 n,不等式

$$|b_n|\leqslant h_n \tag{3.6.87}$$

成立. 记 $\mu=h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}h_nz^n$,式(3.6.87)就意味着 $y(z)\ll h(z)$. 这样,只需证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}h_nz^n$ 有正的收敛半径即可. 经计算,得

$$[h(z)]^2\left(z\sum_{n=0}^{\infty}h_nz^{n-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}h_nz^n\right)=\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\sum_{i=-1}^{n}h_{i+1}h_{n-i}\right)z^n,$$

$$[h(z)]^3 = \left(z\sum_{n=0}^{\infty}h_n z^{n-1}\right)\left[\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\sum_{i=-1}^{n}h_{i+1}h_{n-i}\right)z^{n+1}\right]$$

$$= \sum_{n=-2}^{\infty}\left(\sum_{k=-1}^{n+1}\sum_{i=-1}^{n-k}h_{k+1}h_{n-k-i}\right)z^{n+2}. \tag{3.6.88}$$

从式(3.6.86)和(3.6.88)可推出

$$\sum_{n=0}^{\infty}h_{n+2}z^{n+2} = M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}h_{k+1}h_{i+1}h_{n-k-i}\right)z^{n+2}$$

或

$$h(z) - |\alpha| - |\eta|z$$

$$= M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=-1}^{n-k}h_{k+1}h_{i+1}h_{n-k-i}\right)z^{n+2} -$$

$$M|\alpha|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}h_{k+1}h_{n-k+1}\right)z^{n+2}$$

$$= M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=-1}^{n+1}\sum_{i=-1}^{n-k}h_{k+1}h_{i+1}h_{n-k-i}\right)z^{n+2} -$$

$$M|\alpha|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=-1}^{n+1}h_{i+1}h_{n-i+1}\right)z^{n+2} -$$

$$M|\alpha|^2\sum_{n=0}^{\infty}h_{n+2}z^{n+2} - M|\alpha|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}h_{k+1}h_{n-k+1}\right)z^{n+2}$$

$$= M\left[\sum_{n=-2}^{\infty}\left(\sum_{k=-1}^{n+1}\sum_{i=-1}^{n-k}h_{k+1}h_{i+1}h_{n-k-i}\right)z^{n+2} - |\alpha|^3 - 3|\alpha|^2|\eta|z\right] -$$

$$M|\alpha|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=-1}^{n+1}h_{i+1}h_{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n}h_{k+1}h_{n-k+1}\right)z^{n+2} -$$

$$M|\alpha|^2\sum_{n=0}^{\infty}h_{n+2}z^{n+2}$$

$$= M[(h(z))^3 - |\alpha|^3 - 3|\alpha|^2|\eta|z] - 2M|\alpha|[(h(z))^2 -$$

$$|\alpha|^2 - 2|\alpha||\eta|z] + M|\alpha|^2(h(z) - |\alpha| - |\eta|z).$$

经整理知，$\mu = h(z)$满足方程

$$P(z,\mu)=M\mu^3-2M|\alpha|\mu^2+(M|\alpha|^2-1)\mu+|\eta|z+|\alpha|=0.$$

考虑到 $P(0,|\alpha|)=0,P'_{\mu}(0,|\alpha|)=-1\neq 0$，根据隐函数定理，存在 $\sigma_1>0$，由上面方程确定的函数 $\mu=h(z)$ 在 $|z|<\sigma_1$ 内解析，当然，$\sum_{n=0}^{\infty}h_nz^n$ 在 $|z|<\sigma_1$ 内收敛. 因而，式(3.6.82)是方程(3.6.80)在原点邻域内符合初始条件(3.6.81)的解析解. 引理3.6.7证讫.

引理 3.6.8 若复数 α 满足条件(ⅰ)，则对任意复数 $\eta\neq 0$，方程(3.6.80)在原点邻域内存在符合初始条件(3.6.81′)的解析解

$$y(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n=\eta z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n. \tag{3.6.89}$$

其中，$b_n(n=2,3,\cdots)$ 由递推公式

$$(n+2)(\alpha^{n+2}-\alpha)b_{n+2}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{ki}{n-k+2}\Big[\sum_{j=0}^{m}p_j\alpha^{j(n-k-i+2)}\Big]b_kb_ib_{n-k-i+2} \tag{3.6.90}$$

给出. 另外，$b_{2m}=0(m=1,2,\cdots)$.

证 类似于引理 3.6.7 的证明，将 $y(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 代入式(3.6.84)，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}\alpha^nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}z^n+\frac{1}{\alpha}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}z^n\Big)\Big\{\sum_{j=0}^{m}p_j\int_0^z\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}ib_ib_{n-i+1}\alpha^{j(n-i+1)}\Big]s^n\mathrm{d}s\Big\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}z^n+\frac{1}{\alpha}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}z^n\Big]\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n+1}\Big[\sum_{j=0}^{m}p_j\alpha^{j(n-i+1)}\Big]b_jb_{n-i+1}z^{n+1}\Big\},$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}\alpha^n z^n = b_1 + 2b_2 z + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{(n+2)b_{n+2} + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{ki}{n-k+2}\Big[\sum_{j=0}^{m}p_j\alpha^{j(n-k-i+2)}\Big]b_k b_i b_{n-k-i+2}\Big\}z^{n+1}.$$

比较两边的系数，得到 $b_1 = b_1$，$2b_2\alpha = 2b_2$ 及式(3.6.90)成立. 为满足初始条件(3.6.81′)，应取 $b_1 = \eta \neq 0$. 显然，$b_2 = 0$. 用数学归纳法，从式(3.6.90)可证明：$b_{2m} = 0 (m = 1, 2, \cdots)$. 这是因为，当 k 与 i 为奇数时，$2m - k - i + 2$ 必为偶数.

现在，用类似于引理 3.6.7 的证法来证明系数由式(3.6.90)确定的幂级数(3.6.89)有正的收敛半径. 我们规定序列$\{h_n\}$：

$$h_1 = |\eta|, \quad h_2 = 0, \quad h_{n+2} = M\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-k+1}h_k h_i h_{n-k-i+2}.$$

根据数学归纳法，由式(3.6.90)易证：对一切 n，有 $|b_n| \leqslant h_n$. 这样，对于 $\mu = h(z) = \sum_{n=1}^{\infty}h_n z^n$，就可断言 $y(z) \ll h(z)$.

另外，可以验证：函数 $\mu = h(z)$ 满足方程 $P(z,\mu) = M\mu^3 - \mu + |\eta|z = 0$. 因 $P(0,0) = 0, P'_{\mu}(0,0) = -1 \neq 0$，应用隐函数定理知，存在 $\sigma_2 > 0$，使在 $|z| < \sigma_2$ 内级数 $\sum_{n=1}^{\infty}h_n z^n$ 收敛，从而式(3.6.89)就是方程(3.6.80)在原点邻域内符合初始条件(3.6.81′)的解析解. 引理 3.6.8 证讫.

现在我们来考察在情况(ⅱ)下方程(3.6.80)的解析解.

引理 3.6.9 若复数 α 满足条件(ⅱ)，且 $\sum_{j=0}^{m}|p_j| \leqslant 1$，则对 $0 < |\eta| \leqslant 1$，方程(3.6.80)在原点邻域内存在符合初始条件(3.6.81)的解析解(3.6.82). 其中，系数 $b_n (n = 2, 3, \cdots)$ 由递推公式(3.6.83)给出.

证 由引理 3.6.7 知，方程(3.6.80)有形式幂级数解

(3.6.82),现在来证明(3.6.82)有正的收敛半径.为此,我们考察幂级数 $\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n z^n$.其中,

$$\mu_0=1,\quad \mu_1=1,\quad \mu_{n+2}=s_{n+1}\sum_{\substack{l_1=l_2+l_3=n+2\\ l_1,l_2>0,l_3\geqslant 0}}\mu_{l_1}\mu_{l_2}\mu_{l_3}. \tag{3.6.91}$$

这里,$s_{n+1}=|\alpha^{n+1}-1|^{-1}$,$\sum$ 是对一切整数分拆 $n+2=l_1+l_2+l_3$ 的求和.考虑到 $0<\sum_{j=0}^{m}|p_j|\leqslant 1$,由数学归纳法可证:对一切 n,

$$|b_n|\leqslant \mu_n \tag{3.6.92}$$

成立.

事实上,$|b_0|=|\alpha|=1=\mu_0$,$|b_1|=|\eta|\leqslant 1=\mu_1$.假定对 2,3,…,$n+1$,不等式(3.6.92)都成立,注意到 $0\leqslant k\leqslant n$,$0\leqslant i\leqslant n-k$ 及

$$\left|\frac{(i+1)(k+1)}{(n+2)(n-k+1)}\sum_{j=0}^{m}p_j\alpha^{j(n-k-i)}\right|\leqslant\sum_{j=0}^{m}|p_j|\leqslant 1,$$

从式(3.6.83)可以推出

$$|b_{n+2}|\leqslant s_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\mu_{k+1}\mu_{i+1}\mu_{n-k-i}$$

或

$$|b_n+2|\leqslant s_{n+1}\sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=n+2\\ l_1,l_2>0,l_3\geqslant 0}}\mu_{l_1}\mu_{l_2}\mu_{l_3}.$$

所得的式(3.6.92)意味着 $y(z)\ll\psi(z)$,因而只需证明 $\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n z^n$ 有一个正的收敛半径即可.为此,考察由方程

$$[\varphi(z)]^3-2[\varphi(z)]^2+z+1=0 \tag{3.6.93}$$

所确定的函数

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n z^n,\quad v_n>0. \tag{3.6.94}$$

将式(3.6.94)代入(3.6.93),可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=n+2\\ l_1,l_2,l_3\geqslant 0}} v_{l_1}v_{l_2}v_{l_3}\Big)z^{n+2}+v_0^3-3v_0^2v_1z+$$

$$2\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{l_1+l_2=n+2\\ l_1,l_2\geqslant 0}} v_{l_1}v_{l_2}\Big)z^{n+2}+v_0^2+2v_0v_1z\Big]+z+1=0.$$

比较系数,得 $v_0=1, v_1=1$ 及

$$\sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=n+2\\ l_1,l_2,l_3\geqslant 0}} v_{l_1}v_{l_2}v_{l_3}-2\sum_{\substack{l_1+l_2=n+2\\ l_1,l_2\geqslant 0}} v_{l_1}v_{l_2}=0,$$

或

$$\Big(\sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=n+2\\ l_1,l_2>0,l_3\geqslant 0}} v_{l_1}v_{l_2}v_{l_3}+\sum_{\substack{l_2+l_3=n+2\\ l_2>0,l_3\geqslant 0}} v_{l_2}v_{l_3}+$$

$$\sum_{\substack{l_1+l_3=n+2\\ l_1>0,l_3\geqslant 0}} v_{l_1}v_{l_3}+v_{n+2}\Big)-2\Big(\sum_{\substack{l_1+l_2=n+2\\ l_1>0,l_2\geqslant 0}} v_{l_1}v_{l_2}+v_{n+2}\Big)=0,$$

从而

$$v_{n+2}=\sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=n+2\\ l_1,l_2>0,l_3\geqslant 0}} v_{l_1}v_{l_2}v_{l_3},\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{3.6.95}$$

再用数学归纳法,根据引理 3.6.5,从式(3.6.91),(3.6.95)不难证明:

$$\mu_n\leqslant v_nd_n,\quad n=1,2,\cdots. \tag{3.6.96}$$

现在,我们再来考察方程(3.6.93). 对于 $P(z,s)=s^3-2s^2+z+1$,有 $P(0,1)=0, P'_s(0,1)=-1\neq 0$,故存在 $\sigma_3>0$,由方程(3.6.93)所确定的函数 $\varphi(z)$ 在 $|z|<\sigma_3$ 内是解析的,从而幂级数(3.6.94)在 $|z|<\sigma_3$ 内收敛,因此存在 $R>0$,使得 $v_n\leqslant R^n(n=1,2,\cdots)$. 由此,根据式(3.6.96)及引理 3.6.5,可得到

$$\mu_n\leqslant R^nN^{n-1}n^{-2\delta},\quad n=1,2,\cdots.$$

这说明幂级数 $\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_nz^n$ 至少在 $|z|<(RN)^{-1}$ 上收敛. 于

是，由式(3.6.83)确定系数的幂级数(3.6.82)至少也在 $|z|<(RN)^{-1}$ 上收敛. 证讫.

引理 3.6.10 若复数 α 满足(ⅱ)，且 $0<\sum_{j=0}^{m}|p_j|\leqslant 1$，则对于 $0<|\eta|\leqslant 1$，方程(3.6.80)在原点某邻域内有满足初始条件(3.6.81′)的解析解(3.6.89). 其中，系数 $b_n(n=2,3,\cdots)$ 由递推公式(3.6.90)给出，且有 $b_{2m}=0(m=1,2,\cdots)$.

证 由引理 3.6.8 知，方程(3.6.80)有形式幂级数解(3.6.89)，其具有正的收敛半径即可. 按照引理 3.6.9 的证法，考察

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n z^n.$$

其中，

$$\mu_1=1,$$

$$\mu_2=0,$$

$$\mu_{n+2}=s_{n+1}\sum_{l_1+l_2+l_3=n+2}\mu_{l_1}\mu_{l_2}\mu_{l_3},\quad n=1,2,\cdots. \tag{3.6.97}$$

这里，$l_i(i=1,2,3)$ 为正整数. 易见，$\mu_{2m}=0(m=1,2,\cdots)$.

考虑到本引理的条件及 $1\leqslant k\leqslant n$ 和 $1\leqslant i\leqslant n-k+1$，利用数学归纳法可证：对一切 n，

$$|b_n|\leqslant\mu_n \tag{3.6.98}$$

成立，即 $y(z)\ll\psi(z)$. 这样，只需证明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n z^n$ 有一个正的收敛半径即可. 为此，考察由方程

$$P[z,\varphi(z)]=[\varphi(z)]^3-\varphi(z)+z=0 \tag{3.6.99}$$

所确定的函数 $w=\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n z^n$. 将此函数代入(3.6.97)，比较系数得

$$v_1=1,$$

$$v_2 = 0,$$

$$v_{n+2} = \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=n+2 \\ l_1,l_2,l_3>0}} v_{l_1} v_{l_2} v_{l_3}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

利用数学归纳法，由上式及式(3.6.97)可以证明

$$\mu_n \leqslant v_n d_n, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{3.6.100}$$

其中，d_n 如引理 3.6.5 所定义. 考虑方程(3.6.99)，因为 $P(0,0) = 0, P'_\varphi(0,0) = -1 \neq 0$. 根据隐函数定理，存在 $\sigma_4 > 0$，在 $|z| < \sigma_4$ 内 $\varphi(z)$ 解析，当然，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n z^n$ 在 $|z| < \sigma_4$ 内收敛，故存在 $R > 0$，使 $v_n \leqslant R^n (n = 1,2,\cdots)$. 这样，根据引理 3.6.5，从式(3.6.100)就可得到 $\mu_n \leqslant R^n N^{n-1} n^{-2\delta}, n = 1,2,\cdots$. 这意味着 $\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n z^n$ 至少在 $|z| < (RN)^{-1}$ 上收敛. 因此，由式(3.6.90)所确定系数的幂级数(3.6.89)也至少在 $|z| < (RN)^{-1}$ 上收敛. 引理得证.

根据以上所得到的关于方程(3.6.80)的解析解的存在性引理 3.6.7 至 3.6.10，我们可以证明以下几个关于方程(3.6.78)解析解的存在性定理.

定理 3.6.11 若复数 α 满足条件(ⅰ)，则方程(3.6.78)在 α 的某邻域内有形如

$$x(z) = y[\alpha y^{-1}(z)] \tag{3.6.101}$$

且满足初始条件(3.6.79)的解析解. 其中，$y(z)$ 是方程(3.6.80)在情况(ⅰ)及 $\eta \neq 0$ 的假定下满足初始条件(3.6.81)的解析解(3.6.82)，且(3.6.82)的系数由式(3.6.83)确定.

证 由引理 3.6.7 可知，对 $\eta \neq 0$，方程(3.6.80)在原点某邻域内有满足初始条件(3.6.81)的解析解(3.6.82). 因 $y'(0) = \eta \neq 0$，故存在反函数 $y^{-1}(z)$，它在 α 的某邻域内解析. 于是，从式(3.6.101)可以推出

$$x'(z) = \alpha y'[\alpha y^{-1}(z)] / y'[y^{-1}(z)],$$

$$x^j(z)=y[\alpha^j y^{-1}(z)],\quad j=1,2,\cdots,m.$$

这样，由式(3.6.80)与(3.6.81)可得

$$x''(z)=\{\alpha^2 y''[\alpha y^{-1}(z)]y'[y^{-1}(z)]-\alpha y'[\alpha y^{-1}(z)]y''[y^{-1}(z)]\}/[y'(y^{-1}(z))]^3$$

$$=\sum_{j=0}^{n}p_j y[\alpha^j y^{-1}(z)]=\sum_{j=0}^{m}p_j z^j(z).$$

另外，注意到 $y^{-1}(\alpha)=0$，$y'(0)=\eta\neq 0$，由式(3.6.101)可得

$$x(\alpha)=y[\alpha y^{-1}(\alpha)]=y(0)=\alpha,$$

$$x'(\alpha)=\alpha y'[\alpha y^{-1}(\alpha)]/y'[y^{-1}(\alpha)]=\alpha\eta/\eta=\alpha.$$

至此，定理 3.6.11 证毕.

定理 3.6.12 若复数 α 满足条件(ⅰ)，则方程(3.6.78)在原点某邻域内有形如 $x(z)=y[\alpha y^{-1}(z)]$ 且满足初始条件(3.6.79′)的解析解。其中，$y(z)$ 是方程(3.6.80)在情况(ⅰ)及 $\eta\neq 0$ 的假定下满足初始条件(3.6.81′)的解析解(3.6.89)，且(3.6.89)的系数由式(3.6.90)确定.

证 可用定理 3.6.11 的证法类似地证明. 注意到 $y^{-1}(0)=0$，$y'(0)=\eta\neq 0$，不难推出

$$x(0)=y[\alpha y^{-1}(0)]=y(0)=0,$$

$$x'(0)=\alpha y'[\alpha y^{-1}(0)]/y'[y^{-1}(0)]=\alpha\eta/\eta=\alpha.$$

定理 3.6.13 若复数 α 符合条件(ⅱ)，且 $0<\sum_{j=0}^{m}|p_j|\leqslant 1$，则方程(3.6.78)在 α 某邻域内有形如 $x(z)=y[\alpha y^{-1}(z)]$ 且满足初始条件(3.6.79)的解析解. 其中，$y(z)$ 是方程(3.6.80)在情况(ⅱ)及 $0<|\eta|<1$ 下满足初始条件(3.6.81)的解析解(3.6.82)，且(3.6.82)的系数由式(3.6.83)确定.

证 可用定理 3.6.11 的证法类似地证明.

定理 3.6.14 若复数 α 符合条件(ⅱ)，且 $0<\sum_{j=0}^{m}|p_j|\leqslant 1$，

则方程(3.6.78)在原点某邻域内有形如 $x(z)=y[\alpha y^{-1}(z)]$ 且满足初始条件(3.6.79′)的解析解.其中,$y(z)$ 是方程(3.6.80)在情况(ⅱ)及 $0<|\eta|<1$ 下满足初始条件(3.6.81′)的解析解(3.6.89),且(3.6.89)的系数由式(3.6.90)确定.

证 可用定理 3.6.12 的证法类似地证明.

注 我们可以用上述结果来讨论二阶迭代泛函微分方程

$$x''(z)=\alpha x[x(z)],\quad z\in\mathbf{C}$$

的解析解存在问题.

第4章 函数方程的应用

由于函数方程可以刻画函数的本质属性，所以它有着许多巧妙的应用. 但是，要提供关于函数方程应用的全面报告是很困难的，要评论函数方程在数学领域内外的种种应用更是不可能的，我们只能从几个侧面展示函数方程的应用.

§4.1 定义各种函数

在实分析和复分析中，许多函数都可以由满足某些正则性条件的函数方程的解来定义. 例如 E. Artin 就曾借助 Gamma 方程 $\varphi(x+1)=x\varphi(x)$ 给出了 Γ 函数的现代定义. 这种所谓的公理化方法还为其他各种特殊函数的定义提供了一个模式. 实际上，函数方程已被用于研究在数论、函数论等方面扮演重要角色的 ζ 函数、模函数、椭圆函数等. 在此，我们仅举比较简单的例子来说明.

定义 满足下列诸条件的函数，我们称为**正弦函数**和**余弦函数**，并记为 $S(x)$ 与 $C(x)$：

(ⅰ) 定义域：$S(x)$，$C(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义；

(ⅱ) 特殊值：$C(0)=S(\frac{\pi}{2})=1$，$C(\pi)=-1$；

(ⅲ) 函数方程：$C(x-y)=C(x)C(y)+S(x)S(y)$；

(ⅳ) 函数不等式：$0<C(x)<\dfrac{S(x)}{x}<\dfrac{1}{C(x)}$.

上述定义所确定的函数 $S(x)$ 和 $C(x)$ 的存在性是很明显的，因为容易验证用几何方法定义的函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 满足定义的

全部条件.

下面根据定义来推导 $S(x)$ 和 $C(x)$ 所具有的主要性质.

性质 1 恒等式:$S^2(x)+C^2(x)=1$.

这只需在(ⅲ)中令 $x=y$,再考虑到 $C(0)=1$ 即可.由所得恒等式易得有界性

$$|S(x)|\leqslant 1,\quad |C(x)|\leqslant 1.$$

性质 2 特殊值:$S(0)=C\left(\frac{\pi}{2}\right)=S(\pi)=0$.

事实上,在性质 1 的恒等式中依次令 $x=0$,$x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=\pi$,再考虑条件(ⅱ)就能证得该结论.

性质 3 奇偶性:$S(x)$ 是奇函数,$C(x)$ 是偶函数.

只要在(ⅲ)中令 $x=0$,由 $C(0)=1$,$S(0)=0$,立得 $C(-y)=C(y)$,这便证明了 $C(x)$ 是偶函数.

另外,再在(ⅲ)中令 $x=\frac{\pi}{2}$,根据 $C\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,$S\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,可得

$$C\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=S(y). \tag{4.1.1}$$

由此及(ⅲ)可以推出

$$\begin{aligned} S(-x)&=C\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=C\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\\ &=C(\pi)C\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+S(\pi)S\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &=-S(x), \end{aligned}$$

从而证得 $S(x)$ 是奇函数.

性质 4 相互关系:

$$S\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=C(x),\quad C\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-S(x).$$

事实上,在式(4.1.1)中令 $y=\frac{\pi}{2}+x$,即得 $C(x)=S\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

若在式(4.1.1)中令 $y=-x$,就有 $C\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-S(x)$.

性质 5 周期性:$S(x)$与 $C(x)$都是以 2π 为周期的周期函数.

只要连续运用性质 4,就能证明

$$S(x+2\pi)=S(x),\quad C(x+2\pi)=C(x).$$

性质 6 加法定理:

$$C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y),\tag{4.1.2}$$

$$S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y).\tag{4.1.3}$$

事实上,在(ⅲ)中以 $-y$ 代替 y,由奇偶性,可得式(4.1.2).根据性质 4,从式(4.1.2)中可以推出

$$\begin{aligned}S(x+y)&=-C\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)\\&=-C(x)C\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+S(x)S\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\\&=C(x)S(y)+C(y)S(x),\end{aligned}$$

从而式(4.1.3)成立.

顺便指出,由加法定理还能推出倍自变量公式、半自变量公式以及和差化积公式:

$$C(2x)=C^2(x)-S^2(x)=1-2S^2(x),\tag{4.1.4}$$

$$S(2x)=2S(x)C(x);\tag{4.1.5}$$

$$C\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+C(x)}{2}},\tag{4.1.6}$$

$$S\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-C(x)}{2}};\tag{4.1.7}$$

$$S(x)-S(y)=2S\left(\frac{x-y}{2}\right)C\left(\frac{x+y}{2}\right),\tag{4.1.8}$$

$$C(x)-C(y)=-2S\left(\frac{x-y}{2}\right)S\left(\frac{x+y}{2}\right);\tag{4.1.9}$$

$$C(x+y)+C(x-y)=2C(x)C(y),\tag{4.1.10}$$

$$S(x+y)+S(x-y)=2S(x)C(y). \tag{4.1.11}$$

利用条件(ⅰ)~(ⅲ)就足以证明性质1至性质6成立,但证明下面的性质则要用到条件(ⅳ).

性质7 单调性:在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上,$S(x)$严格递增,$C(x)$严格递减.

事实上,由(ⅳ)可知,在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上$C(x)>0$,$S(x)>0$.今任取$x_1,x_2$,使$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$,则$\frac{x_2+x_1}{2}$与$\frac{x_2-x_1}{2}$必在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内,由式(4.1.8)和(4.1.9)得

$$S(x_2)-S(x_1)=2S\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)C\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)>0,$$

$$C(x_2)-C(x_1)=-2S\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)S\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)<0,$$

即$S(x_2)>S(x_1)$,$C(x_2)<C(x_1)$,这就证明了$S(x)$和$C(x)$的单调性.

性质8 连续性:$C(x)$与$S(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

分三步来证明:

第一步:先证$C(x)$在$x=0$处连续,即要证明$\lim\limits_{x\to 0}C(x)=1$(因为$C(0)=1$).由性质7可知,$C(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上严格递减且有下界,故$\lim\limits_{x\to 0^+}C(x)$存在.为求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}C(x)=l$,现取收敛于0的正项数列$\{x_n\}$:$x_1=\frac{\pi}{2}$,$x_2=\frac{\pi}{2^2}$,…,$x_n=\frac{\pi}{2^n}$.根据性质2及式(4.1.6),可得

$$C(x_1)=0,\quad C(x_2)=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \cdots.$$

显然,有递推关系

$$C(x_n)=\frac{1}{2}\sqrt{2+2C(x_{n-1})}. \tag{4.1.12}$$

对式(4.1.12)两边取极限,可得到$l=\frac{1}{2}\sqrt{2+2l}$.注意到在

$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$上有 $C(x)>0$，必有 $l=1$，也就是说 $\lim\limits_{n\to\infty} C(x_n)=1$，亦即 $\lim\limits_{x\to 0^+} C(x)=1$. 再由 $C(x)$的偶性就可证明 $\lim\limits_{x\to 0^-} C(x)=1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0} C(x)=1$. 至此，我们证明了 $C(x)$在 $x=0$ 处连续.

第二步：证 $S(x)$在 $x=0$ 处连续. 这是显然的，因为

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \lim_{x\to 0} \pm\sqrt{1-C^2(x)} = 0,$$

而 $S(0)=0$.

第三步：对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\lim_{h\to 0} C(x+h) = C(x)\lim_{h\to 0} C(h) - S(x)\lim_{h\to 0} S(h) = C(x),$$

$$\lim_{h\to 0} S(x+h) = \lim_{h\to 0} \pm\sqrt{1-C^2(x+h)} = \pm\sqrt{1-C^2(x)} = S(x).$$

这就证明了 $C(x)$与 $S(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

性质 9 重要极限公式：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{S(x)}{x}=1$.

事实上，由条件(ⅳ)和 $C(x)$的连续性，利用迫敛性可得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{S(x)}{x}=1$，又因 $S(x)$是奇函数，有 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{S(x)}{x}=1$. 综合以上结论，可得$\lim\limits_{x\to 0}\frac{S(x)}{x}=1$.

为了证明极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，我们需要讨论下面两个问题：

第一，由定义所确定的函数 $C(x)$与 $S(x)$与用几何方法定义的函数 $\cos x$ 与 $\sin x$ 之间的关系；

第二，由定义所述的正常数 π 与圆周率之间的关系. 为此，我们先用 Cauchy 方法来证明：$C(x)\equiv\cos x$.

由 $C(x)$的连续性，考虑到 $C(0)=1$，且在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上有 $C(x)>0$，故可任取一实数 $r\left(0<r<\frac{\pi}{2}\right)$，使在$[0,r]$上 $C(x)>0$. 又因为 0

$<C(r)<1$，故能够找到这样的 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，使 $C(r)=\cos\theta$.

将关系式(4.1.10)改写成

$$C(x+y)=2C(x)C(y)-C(x-y).$$

在上式中，依次令

$$x=r,y=r;\quad x=2r,y=r;\quad x=3r,y=r;\quad \cdots$$

便有

$$C(2r)=2C^2(r)-1=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,$$

$$C(3r)=2C(2r)C(r)-C(r)=2\cos 2\theta\cos\theta-\cos\theta=\cos 3\theta,$$

$$C(4r)=2C(3r)C(r)-C(r)=2\cos 3\theta\cos\theta-\cos\theta=\cos 4\theta,$$

$$\cdots.$$

一般地，由数学归纳法可证：对任意自然数 n，有

$$C(nr)=\cos n\theta. \tag{4.1.13}$$

另外，在式(4.1.6)中令 $x=\frac{1}{2}r$，由于在$[0,r]$上有 $C(x)>0$，故

$$C\left(\frac{r}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+C(r)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}.$$

同理可证

$$C\left(\frac{r}{2^2}\right)=\cos\frac{\theta}{2^2},\quad C\left(\frac{r}{2^3}\right)=\cos\frac{\theta}{2^3},\quad \cdots.$$

一般地，由数学归纳法可证，对任意自然数 m，有

$$C\left(\frac{r}{2^m}\right)=\cos\frac{\theta}{2^m}. \tag{4.1.14}$$

综合式(4.1.13)和(4.1.14)，可得

$$C\left(\frac{n}{2^m}r\right)=\cos\frac{n}{2^m}\theta.$$

这就是说，对形如 $\frac{n}{2^m}$ 的 x 值，都有

$$C(rx)=\cos\theta x. \tag{4.1.15}$$

由于任何正实数 x 都可表为 $\frac{n}{2^m}$ 型数的极限，由 $C(x)$ 的连续性，对式(4.1.15)两边取极限就可得到对任意 $x>0$，结论(4.1.15)也成立. 再注意到 $C(x)$ 的偶函数性及 $C(0)=1$，$\cos 0=1$，从而知道式(4.1.15)对任意实数 x 都成立. 若以 x 代 $\frac{x}{r}$，并记 $\frac{\theta}{r}=\alpha$，则有

$$C(x) = \cos \alpha x. \tag{4.1.16}$$

由 $C\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，从式(4.1.16)可得到 $\cos \frac{\pi\alpha}{2}=0$. 根据前面 $\cos x$ 的性质2，可得 $\alpha=1$. 因而，在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 $C(x)\equiv\cos x$. 再根据相互关系性质，易见在 $(-\infty,+\infty)$ 上同样有 $S(x)\equiv\sin x$.

综上所述，我们可得到如下的结论：

第一，用公理化定义的函数 $S(x)$ 与 $C(x)$ 分别等价于用几何定义的函数 $\sin x$ 与 $\cos x$，即 $S(x)\equiv\sin x$，$C(x)\equiv\cos x$.

第二，在公理化定义中的正常数 π 就是几何上的圆周率. 鉴于此，由上述的性质9：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{S(x)}{x}=1$，可以推导出要证的重要极限公式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

第三，关于三角函数的形形色色的解析定义方法. 譬如，在有的文献中就采用积分给出正弦函数与余弦函数的定义，并在此定义基础上证明公式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

例 构造 $\mathbf{R}$ 上处处不可微的实连续函数.

有些理论(譬如 Fourier 级数)的研究对象是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数，但是，经常遇到的函数都是非周期的，这就需要对该函数实行**周期延拓**. 设函数 f 在 $[-l,l]$ 上给出，我们作辅助函数 f^*，使

$$f^*(x) = f(x), \quad x \in (-l,l),$$

再令

$$f^*(-l)=f^*(l)=f(l),$$

并将函数 f^* 按周期性规律拓展到整个实轴上，使之以 $2l$ 为周期，即 $f^*(x+2l)=f^*(x)$. 这样，延拓后所得的函数 f^* 就是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数，且在 $(-l,l)$ 等同于函数 f.

B. L. Van der Waerden 将一个简单函数周期延拓到整个 $\mathbf{R}$ 上，从而构造出了在 $\mathbf{R}$ 上处处不可微的实连续函数. 下面我们介绍这种构造方法.

设 $h(x)=|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$，引入辅助函数 φ，其定义如下：

$$\varphi(x)=h(x),\quad x\in(-1,1).$$

将 φ 按周期规律扩展到 $\mathbf{R}$ 上，即 $\varphi(x+2)=\varphi(x)$. 于是，对于一切 s 与 t，有

$$|\varphi(s)-\varphi(t)|\leqslant|s-t|.$$

显然，φ 在 $\mathbf{R}$ 上连续. 今定义

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^nx).$$

由于 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$，由 Weierstrass 检验法知，上式右边函数级数在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛，因而 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

对一个固定的 $x\in\mathbf{R}$ 和一个正数 m，设 $\delta_m=\pm\frac{1}{2}\cdot 4^{-m}$（其中，符号的选取是使 4^mx 与 $4^m(x+\delta_m)$ 之间没有整数）. 现在定义

$$r_n=\frac{\varphi[4^n(x+\delta_m)]-\varphi(4^nx)}{\delta_m}.$$

当 $n>m$ 时，$4^n\delta_m$ 是偶数，所以 $r_n=0$；当 $0\leqslant n\leqslant m$ 时，有 $|r_n|\leqslant 4^n$.

考虑到 $|r_m|\leqslant 4^m$，我们可以断定

$$\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right|=\left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n r_n\right|\geqslant 3^m-\sum_{n=0}^{m-1}3^n=\frac{1}{2}(3^m+1).$$

当 $m\to\infty$ 时，$\delta_m\to 0$，故 f 在 x 点上不可微.

顺便指出，处处不可微的连续函数的第一个例子是由 Weier-

strass 和 Bolzano 给出的. 事实上,处处不可微的连续函数类是很大的.

§4.2 揭示函数性质

函数方程是函数某些主要性质的一种生动表现. 本节的内容主要就是用函数满足的方程来判断该函数满足何种性质.

1) 函数的超越性

函数可分为代数函数与超越函数两类. 分清哪些函数是代数函数,哪些函数是超越函数有着非常重要的意义. 为此,我们给出了一些判断法则. 下面先叙述代数函数与超越函数的概念.

定义 1 若函数 $f:D\to\mathbf{R}$(这里 $D\subset\mathbf{R}$)满足代数方程

$$P[x,f(x)]=0,\quad x\in D, \tag{4.2.1}$$

其中,$P(x,y)=\sum_{k=0}^{n}p_k(x)y^k(n\geqslant 1)$ 是一个既约多项式,而 $p_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 都是 x 的多项式,且 $p_n(x)\neq 0$,则称函数 f 为**代数函数**.

顺便指出,所谓多项式 $P(x,y)$ 是**既约**的,是指 $P(x,y)$ 不能表示成两个非常数多项式之积. 定义 1 中关于 $P(x,y)$ 是既约的假定是非本质的,这只是为了后面证明的方便.

从定义 1 可见,代数函数就是由代数隐函数式(4.2.1)所确定的函数.

例 1 显然,常函数 $y=c$(c 为常数)是代数函数,因为它满足最简单的代数方程 $y-c=0$.

例 2 有理函数 $y=Q(x)/P(x)$(其中,P,Q 都是 x 的多项式)是代数函数,因为它满足代数方程 $Q(x)-P(x)y=0$.

例 3 无理函数也是代数函数. 例如,无理函数 $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 满足代数方程

$$(x^2-x)-2xy^2+y^4=0.$$

例 4 有理指数的幂函数 $y=x^{\frac{n}{m}}$ 也是代数函数，因为它满足代数方程 $y^m-x^n=0$.

应该指出，并非所有的代数函数都能用常数及自变量 x 施行有限次代数运算（四则运算及开方运算）所构成的显函数来表达. 例如，由代数方程

$$y^5+(x^2-1)y^2+\sqrt{5}y=2x$$

确定的函数 $y=f(x)$ 就是一个代数函数，但这个函数 f 却未必能用显函数表示，因为一般说来，五次以上的代数方程都不能用根式求解. 因此，代数函数是一类比能用常数与自变量 x 经有限次代数运算表达的函数更加广泛的函数.

定义 2 非代数函数的函数称为**超越函数**.

换言之，若函数 f 在其定义域或定义域的子区间上不是任何形如式(4.2.1)的代数方程的解，则这个函数 f 就是超越函数. 可以说，超越函数“超出”了代数方法的范围，这正是给这类函数命名的数学家 Euler 的原意.

由于判别一个函数是代数函数还是超越函数具有重要意义，所以 200 多年前吸引了许多数学家的注意. 自从 19 世纪 30 年代法国数学家 Liouville 证明 $\lg x$ 的超越性以后，相继有人证明了一系列初等函数的超越性. 但是，通常的证明都是个别地进行的. 也就是说，对于不同的函数要采用不同的证法. 下面介绍一个例子.

例 5 证明：$y=x^{\mu}(x>0)$ 是超越函数. 这里，μ 是无理数.

证 假设 $y=x^{\mu}$（μ 为无理数）能满足代数方程(4.2.1)，且 $P(x,y)$ 与 $p_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 都如定义 1 所设，例如

$$p_n(x)=\alpha_m x^m+\alpha_{m-1}x^{m-1}+\cdots+\alpha_0.$$

其中，$\alpha_i(0\leqslant i\leqslant m)$ 是实常数，$\alpha_m\neq 0$. 将 $y=x^{\mu}$ 代入式(4.2.1)可得恒等式

$$\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha_i x^i\right)(x^\mu)^n+\sum_{k=0}^{n-1}p_k(x)(x^\mu)^k\equiv 0.$$

将上式左端进行整理，可得

$$\alpha_m x^{n\mu+m}+\beta_1 x^{n_1\mu+m_1}+\beta_2 x^{n_2\mu+m_2}+\cdots+\beta_k x^{n_k\mu+m_k}+\cdots\equiv 0. \tag{4.2.2}$$

其中，$\beta_1,\beta_2,\cdots$是实数；$m_1,m_2,\cdots$与$n_1,n_2,\cdots$都是非负整数.

既然恒等式(4.2.2)成立，那么首项$\alpha_m x^{n\mu+m}$必与后面某项相抵消. 不妨设它与第$k+1$项$\beta_k x^{n_k\mu+m_k}$相抵消，于是$n\mu+m=n_k\mu+m_k$必成立，即

$$m-m_k=(n_k-n)\mu. \tag{4.2.3}$$

(ⅰ) 若$n_k\neq n$，则由式(4.2.3)可得到整数等于无理数的结果，这显然是荒谬的；

(ⅱ) 若$n_k=n, m=m_k$，那么第$k+1$项就是第一项，但是第一项是不会同自身相消的；

(ⅲ) 若$n_k=n, m\neq m_k$，则由式(4.2.3)可得到非零整数等于0的错误结论.

综合(ⅰ)～(ⅲ)知，式(4.2.3)是不成立的，即式(4.2.2)中的首项是不能消去的，亦即$y=x^\mu$(μ为无理数)不能满足代数方程(4.2.1)，故$y=x^\mu$(μ为无理数)是超越函数. 证讫.

下面，我们借助于初等函数所满足的函数方程来判别该函数的超越性.

为了给出下面的判别法，特作如下的说明.

附注 若$f:D\to\mathbf{R}$是一个代数函数，则方程$f(x)=c$(c为任一个常数)的解集是有穷的.

我们令$\mathbf{R}^*=\mathbf{R}^+\backslash A$. 其中，$\mathbf{R}^+$是正实数集，$A$是一个含于$\mathbf{R}^+$的可列集. 我们来证明下面的定理.

定理 4.2.1 设f是一个非常数函数，它的定义域$D\supset\mathbf{R}^*$，且$f:D\to\mathbf{R}$满足 Poincaré 函数方程

$$f(\alpha x)=G[f(x)],\quad x\in D. \tag{4.2.4}$$

其中，$\alpha>1$，$G:E\to\mathbf{R}$ 且 $E\supset f(D)$.

若 f 与 G 符合下列条件：

（ⅰ）G 存在一个不动点 $\xi\in E\cap f(D)$，即 $G(\xi)=\xi$；

（ⅱ）存在 $x_0\in\mathbf{R}^*$，使 $f(x_0)=\xi$；

（ⅲ）$\alpha^n x_0\in\mathbf{R}^+$，$n=1,2,\cdots$.

则 f 是一个超越函数.

证 我们记 $U=\{x\mid f(x)=\xi,x\in\mathbf{R}^+\}$. 显然，$x_0\in U$，且 $\alpha x_0\in\mathbf{R}^*\subset D$. 由条件（ⅰ）和（ⅱ）与方程(4.2.4)可知

$$f(\alpha x_0)=G[f(x_0)]=G(\xi)=\xi.$$

因此，$\alpha x_0\in U$. 根据条件（ⅲ），归纳可得

$$\alpha^n x_0\in U,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{4.2.5}$$

现在，注意到 $\alpha>1$，从式(4.2.5)可知集合 U 是无穷的. 因此，当 f 是非常数时，它不是一个代数函数，这就证明了 f 是一个超越函数. 证讫.

我们还容易证明下面的引理.

引理 4.2.1 若 $f:D\to\mathbf{R}$ 是一个超越函数，且它的反函数 $f^{-1}:f(D)\to\mathbf{R}$ 存在，则 f^{-1} 也是超越函数.

借助引理 4.2.1，我们能建立下面的定理.

定理 4.2.2 设 $E,D\subset\mathbf{R}$，$f:D\to\mathbf{R}$ 是非常数函数，它的值域 $f(D\cap E)\supset\mathbf{R}^*$，它的反函数 $f^{-1}:f(D)\to\mathbf{R}$ 存在. 此外，设 f 满足 Schröder 函数方程

$$f[g(x)]=Af(x),\quad x\in D\cap E. \tag{4.2.6}$$

其中，$A>1$，$g:E\to D$，且 $g(E)\subset D$. 若 f 和 g 符合下列条件：

（ⅰ）存在 g 的不动点 $\xi\in E\cap D$，即 $g(\xi)=\xi$；

（ⅱ）存在 $y_0\in\mathbf{R}^*$，使 $y_0=f(\xi)$；

（ⅲ）$A^n y_0\in\mathbf{R}^*$，$n=1,2,\cdots$.

则 f 是超越函数.

证 若记 $\varphi: f(D\cap E)\to D$ 为 $\varphi(y)=f^{-1}(y)$，则式(4.2.6)变为

$$\varphi(Ay)=g[\varphi(y)],\quad y\in f(D\cap E).$$

显然，函数 φ 符合定理 4.2.1 的全部条件，于是 φ 是超越函数. 根据引理 4.2.1，f 也是超越函数，定理得证.

现在，我们举例说明定理 4.2.1 与定理 4.2.2 的应用.

例 6 正弦函数 $f(x)=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 满足 Poincaré 方程

$$f(3x)=3f(x)-4[f(x)]^3.$$

其中，$A=\varnothing$，$\mathbf{R}^*=\mathbf{R}^+$，$D=\mathbf{R}$，$f(D)=[-1,1]$，$\alpha=3$，$G(y)=3y-4y^3$，而 $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 明显地，有 $\xi_1=0\in\mathbf{R}\cap f(D)=[-1,1]$，以及 $\xi_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\in[-1,1]$ 是 G 的不动点，且存在 $x_0=\pi\in\mathbf{R}^*$，使 $f(x_0)=\xi_1$. 又因 $3^n\pi\in\mathbf{R}^+$ $(n=1,2,\cdots)$，根据定理 4.2.1，可知 $f(x)=\sin x$ 是超越函数.

例 7 正切函数 $f(x)=\tan x$ 满足 Poincaré 方程

$$f(2x)=\frac{2f(x)}{1-[f(x)]^2}.$$

其中，$D=\{x\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$f(D)=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in N\}$，于是 $D\supset\mathbf{R}^*=\mathbf{R}^+\setminus A$. 此外，$\alpha=2$，$G(y)=\frac{2y}{1-y^2}$，$G:E\to\mathbf{R}$. 这里，$E=R\setminus\{-1,1\}$. 显然，$\xi=0\in E\cap f(D)=E$ 是 G 的不动点，且存在 $x_0=\pi\in\mathbf{R}^*$，使 $f(x_0)=\xi_1$. 又因 $2^n\pi\in\mathbf{R}^*$ $(n=1,2,\cdots)$，根据定理 4.2.1，可知 $f(x)=\tan x$ 是超越函数.

附注 指数函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$ 满足 Poincaré 方程

$$f(2x)=[f(x)]^2.$$

其中，$D=\mathbf{R}$，$f(D)=\mathbf{R}^+$，$A=\varnothing$，$E=\mathbf{R}$，$a=2$，且 $\xi=1\in E\cap f(D)=\mathbf{R}^+$ 是 $G(y)=y^2$ 的不动点，但是不存在 $x_0\in\mathbf{R}^*$ 使 $f(x_0)=1$，因此，定理 4.2.1 不能用来判别 $f(x)=a^x$ 是否具有超越性. 为了扩

大判别的范围，需要给出新的判别法则. 首先，直接引述高等代数上两个熟知的结论.

引理 4.2.2 若二元多项式 $P_1(x,y)$ 与 $P_2(x,y)$ 互质(即它们除了非零常数外没有别的公因式)，则方程 $P_1(x,y)=0$ 和 $P_2(x,y)=0$ 只有有限组公共解.

引理 4.2.3 若对于两个多项式 $P_1(x,y)$ 和 $P_2(x,y)$，方程 $P_1(x,y)=0$ 与 $P_2(x,y)=0$ 有无穷组不同的公共解，$P_1(x,y)$ 是既约的，则存在多项式 $Q(x,y)$，使 $P_2(x,y)\equiv Q(x,y)P_1(x,y)$.

证 若结论不成立，则 $P_1(x,y)$ 不是 $P_2(x,y)$ 的因式，又因 $P_1(x,y)$ 是既约的，故 $P_1(x,y)$ 与 $P_2(x,y)$ 必互质. 这样，由引理 4.2.2 知，方程 $P_1(x,y)=0$ 与 $P_2(x,y)=0$ 只有有限组公共解. 这与假设矛盾，所以结论得证.

定理 4.2.3 设 $f:D\to\mathbf{R}$ 是非常数函数，其定义域 D 包含某一个区间 $(0,r)(r>0)$. 假定函数 f 满足 Poincaré 方程

$$f(\alpha x)=G[f(x)],\quad x\in D. \tag{4.2.7}$$

其中，$\alpha>1$，$G:E\to\mathbf{R}$ 且 $E\supset f(D)$. 此外，设 $G(y)=\dfrac{M(y)}{L(y)}$ 是既约分式，$L(y)$ 和 $M(y)$ 分别是 l 次和 m 次多项式，且对 $y\in E\cap f(D)$ 有 $L(y)\neq 0$. 若 $l\neq m$，$\max(l,m)>1$，则 f 是超越函数.

证 设 f 是代数函数，那么它必在区间 $(0,r)$ 内满足代数方程 (4.2.1)，即

$$P[x,f(x)]\equiv 0,\quad x\in(0,r). \tag{4.2.8}$$

其中，$P(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}p_k(x)y^k\ (n\geqslant 1)$ 是既约的；$p_k(x)(k=0,1,2,\cdots,n)$ 是多项式，且 $p_n(x)\neq 0$. 在式(4.2.8)中以 αx 代 x，并利用式(4.2.7)，可得到

$$P[\alpha x,G(f(x))]=0,\quad x\in D_1. \tag{4.2.9}$$

其中，$0<r_1=\dfrac{r}{\alpha}<r$，$D_1=(0,r_1)$. 此外，对 $x\in D_1$，$y\in f(D_1)$，我

们有

$$P[\alpha x, G(y)] = \sum_{k=0}^{n} p_k(\alpha x)[G(y)]^k = \sum_{k=0}^{n} p_k(\alpha x)\left[\frac{M(y)}{L(y)}\right]^k,$$

于是

$$P[\alpha x, G(y)] = \frac{1}{[L(y)]^n}\sum_{k=0}^{n} p_k(\alpha x)[M(y)]^k[L(y)]^{n-k}. \tag{4.2.10}$$

我们记

$$\bar{p}_k(x) = p_k(\alpha x), \tag{4.2.11}$$

$$\bar{P}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k(x)[M(y)]^k[L(y)]^{n-k}. \tag{4.2.12}$$

因为对 $y \in f(D)$，有 $L(y) \neq 0$，所以式(4.2.10)可写成

$$\bar{P}(x,y) = [L(y)]^n P[\alpha x, G(y)]. \tag{4.2.13}$$

依照式(4.2.9)和(4.2.13)，非常数函数 f 也满足代数方程

$$\bar{P}[x, f(x)] = 0, \quad x \in D_1. \tag{4.2.14}$$

由于函数 f 在 $(0, r_1)$ 上同时满足代数方程(4.2.8)和(4.2.14)，而 $P(x,y)$ 是既约的，所以根据引理 4.2.3，必存在多项式 $Q(x,y)$，使

$$\bar{P}(x,y) \equiv Q(x,y)P(x,y).$$

因为 $\bar{P}(x,y)$ 与 $P(x,y)$ 关于 x 的次数是相同的，故 $Q(x,y) \equiv Q(y)$，因此

$$\bar{P}(x,y) = Q(y)P(x,y). \tag{4.2.15}$$

下面分别进行讨论：

(ⅰ) 设 $l > m$. 由 $\max(l,m) > 1$，有 $l > 1$. 因为 $P(x,y)$ 是既约的，故 $\bar{p}_0(x) = p_0(\alpha x) \neq 0$，根据式(4.2.12)，我们知道 $\bar{P}(x,y)$ 是关于 y 的 ln 次多项式. 再从式(4.2.15)，不难看出，$Q(y)$ 是 $(ln-n)$ 次多项式. 由于 $ln-n=(l-1)n \geqslant 1$，所以方程 $Q(y)=0$ 至少有一个根 y_0. 考虑到式(4.2.15)，对任意 x 都有

$$\bar{P}(x,y_0)=0,\quad x\in D_1. \tag{4.2.16}$$

现在，我们来证明：$L(y_0)\neq 0$. 从式(4.2.12)和(4.2.15)得

$$\sum_{k=0}^{n}\bar{p}_k(x)[M(y)]^k[L(y)]^{n-k}=Q(y)P(x,y).$$

若 $L(y_0)=0$，在方程(4.2.12)中令 $y=y_0$，再注意到上式，我们得出

$$\bar{P}(x,y_0)=\bar{p}_n(x)[M(y_0)]^n\equiv 0.$$

因 $\bar{p}_n(x)\equiv 0$，故 $M(y_0)=0$，这与 $M(y)/L(y)$ 是既约分式的假定相矛盾. 由 $L(y_0)\neq 0$，根据式(4.2.13)和(4.2.16)，有

$$P[\alpha x,G(y_0)]\equiv 0.$$

这意味着 $P(x,y)$ 有一个因式 $y-G(y_0)$，而 $P(x,y)$ 是既约的，故有

$$P(x,y)\equiv c[y-G(y_0)].$$

其中，c 是一个常数，$c\neq 0$. 鉴于此，方程(4.2.8)有唯一解 $f(x)=G(y_0)(x\in D_1)$. 这个结论与所设的 f 是满足方程(4.2.8)的非常数函数相矛盾，从而证明了函数 f 在定义域的部分区域$(0,r)$内是超越函数. 因此，函数 f 是超越函数.

(ⅱ) 设 $l<m$，同法可以证明结论是正确的.

至此，定理证讫.

定理 4.2.4 设 $f:D\to\mathbf{R}$ 是非常数函数，$D,E\subset\mathbf{R}$，且 $f(D\cap E)$ 包含某区间$(0,r)(r>0)$. 又设 f 存在反函数 f^{-1}. 设函数 f 满足 Schröder 方程

$$f[g(x)]=Af(x),\quad x\in D\cap E. \tag{4.2.17}$$

其中，$A>1$，$g:E\to D$ 且 $g(E)\subset D$. 此外，设 $g(x)=\dfrac{m(x)}{l(x)}$ 是既约分式，$l(x)$ 与 $m(x)$ 分别是 l 次和 m 次多项式，且对 $x\in D\cap E$，有 $l(x)\neq 0$. 若 $l\neq m$，$\max(l,m)>1$，则 f 是超越函数.

证 由于 f 有反函数 f^{-1}，所以可以用 $\varphi(y)=f^{-1}(x)$ 记 $\varphi:f$

$(D\cap E)\to D$. 从式(4.2.17)可得到

$$g(x)=f^{-1}[Af(x)],\quad x\in D\cap E.$$

或

$$\varphi(Ay)=g[\varphi(y)],\quad y\in f(D\cap E).$$

这样,φ 就符合定理 4.2.3 的全部条件,因而 φ 是超越函数. 按照引理 4.2.1,f 也是超越函数. 定理 4.2.4 得证.

最后,我们给出以下几个例子.

例 8 余弦函数 $f(x)=\cos x(x\in\mathbf{R})$满足 Poincaré 函数方程 $f(2x)=2[f(x)]^2-1(x\in\mathbf{R})$. 其中,$a=2$,$G(y)=2y^2-1$. 明显地,$L(y)=1$,$M(y)=2y^2-1$,$G(y)$为既约分式. 另外,$l=0$,$m=2$. 按照定理 4.2.3,可知 $f(x)=\cos x$ 是超越函数.

例 9 反正切函数 $f(x)=\arctan x(x\in\mathbf{R})$满足 Schröder 函数方程 $f\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=2f(x)$. 其中,$A=2$,$g(x)=\frac{2x}{1-x^2}(|x|<1)$是既约分式. 另外,$m(x)=2x$,$l(x)=1-x^2\neq 0(|x|\neq 1)$,$l=2$,$m=1$. 按照定理 4.2.4,可知 $f(x)=\arctan x$ 是超越函数.

例 10 指数函数 $f(y)=a^x(a>0,a\neq 1)$满足 Poincaré 方程 $f(2x)=[f(x)]^2$,$x\in\mathbf{R}$. 其中,$a=2$,$G(y)=y^2$,$M(y)=y^2$,$L(y)=1$. 我们设 $D=\mathbf{R}$,于是有 $0\in f(D)=\mathbf{R}^+$. $G(y)$可以看做是既约分式. 此外,$l=0$,$m=2$. 借助定理 4.2.3,可知 $f(x)=a^x$ 也是超越函数.

我们看到,对于指数函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,虽然不能应用定理 4.2.1 进行判别,但是能够应用定理 4.2.3 进行判别.

2) *超超越函数*

前面我们讨论了函数超越性的判别,但是不同的超越函数还存在着"超越程度"的差异,于是超越函数又分为超超越函数与次超越函数.

定义 3 若一个函数(或幂级数)f 满足形如

$$P[x,y,y',\cdots,y^{(n)}]=0 \tag{4.2.18}$$

(其中,P 是一个 $n+2$ 元的非平凡多项式)的微分方程,则称 f 为**次超越函数**或**微分代数函数**. 若 f 不满足任何形如方程(4.2.18)的代数微分方程,则称 f 为**超超越函数**.

次超越函数在数学分析中屡见不鲜,例如 e^x,$\lg x$,$\sin x$,$\arctan x$,Bessel 函数等都是次超越函数. 另外,不难证明:次超越函数的和、差、积和商以及反函数、复合函数仍是次超越函数. 例如,函数

$$J_0\left[\sec^{-1}\left(\frac{e^{x^2}+\sqrt{\ln x}}{e^{x^2}-\sqrt{\ln x}}\right)^x\right]$$

(其中,J_0 是 Bessel 函数)就是次超越函数.

Ritt 很早就求出了 Poincaré 函数方程

$$f(ax)=G[f(x)]$$

的所有次超越函数的解.

从 1947 年到 1984 年,先后五次有人证明了Jacobi的 θ 函数 $\theta(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 也是次超越函数.

1887 年,Hölder 证明了 Euler 的 Gamma 函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

是超超越函数. 这是历史上第一次证明一个函数是超超越函数. 1925 年,Ostrowski 又借助函数 $\Gamma(x)$ 所满足的函数方程 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 给出了更方便的证明,这就是下面的定理.

定理 4.2.5 $\Gamma(x)$是超超越函数.

证明从略.

3) 函数的周期性

函数的周期性是函数的重要性质之一. 下面将揭示函数方程与周期函数的关系. 事实上,函数的周期性正是用它所满足的函数

方程 $f(x+T)=f(x)$来定义的.

定理 4.2.6 设 λ 为非零常数. 若函数 f 满足函数方程

$$f(x+\lambda)=\frac{1}{f(x)},$$

则 f 是以 2λ 为周期的周期函数.

事实上, $f(x+2\lambda)=\dfrac{1}{f(x+\lambda)}=f(x)$.

定理 4.2.7 设 λ 为非零常数,若函数 f 满足函数方程

$$f(x+\lambda)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)},$$

则 f 必是以 2λ 为周期的周期函数.

这是因为 $f(x+2\lambda)=\dfrac{1-f(x+\lambda)}{1+f(x+\lambda)}=f(x)$.

类似地,还可以证明下面的定理.

定理 4.2.8 设 λ 为非零常数,若函数 f 满足函数方程

$$f(x+\lambda)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

则 f 必是以 4λ 为周期的周期函数.

定理 4.2.9 设 $\lambda>0$,且为常数,若对一切 $x\in\mathbf{R}$,函数 f 满足函数方程

$$\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}=f(x+\lambda),$$

则 f 必是以 2λ 为周期的周期函数.

证 因为

$$\begin{aligned}
&f(x+2\lambda)\\
&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+\lambda)-[f(x+\lambda)]^2}\\
&=\frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \left\{ \frac{1}{4} - f(x) + [f(x)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \left| \frac{1}{2} - f(x) \right|.$$

又因为 f 满足所设的函数方程，所以对任意 $x \in \mathbf{R}$，必有 $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$，从而有

$$f(x+2\lambda) = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} - f(x) \right] = f(x),$$

于是定理得证.

定理 4.2.10 设 D 与 M 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集，$\lambda \in \mathbf{R}$ 为一个固定数，f 与 F 是分别定义于 D 和 M 上且取值于 M 中的两个函数，满足

$$f(x+\lambda) = F[f(x)].$$

若对任意 $x \in D$，有 $x \pm k \in D$，且有 $m \in \mathbf{N}$，使

$$F^m(x) \equiv x,$$

但对于 $m \geqslant 2$，$1 \leqslant i \leqslant m-1$，有 $f^i(x) \neq x$，则 f 是以 $m|\lambda|$ 为周期的周期函数.

证 由所设条件，有

$$\begin{aligned} f(x+m\lambda) &= F[f(x+(m-1)\lambda)] \\ &= F^2[f(x+(m-2)\lambda)] \\ &= \cdots \\ &= F^m[f(x)] \\ &= f(x), \end{aligned}$$

于是 $m|\lambda|$ 是 f 的周期. 证讫.

不难看出，前面的定理 4.2.6 到 4.2.9 都是定理 4.2.10 的特例. 若取 $F(x) = \frac{1}{x}$，由定理 4.2.10 就能推出定理 4.2.6；若取

$F(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$，由定理 4.2.10 就能推出定理 4.2.9.

依据上面的结果，很容易得到下面的定理.

定理 4.2.11 设 $f(x)$满足函数方程

$$f(x+\lambda)=g[f(x)],\quad x\in D. \tag{4.2.19}$$

其中，D 为 $f(x)$的定义域且 λ 为非零常数. 那么，

(ⅰ) 若 $g(x)=-x,\pm\frac{1}{x},a-x,\frac{x}{x-1},\frac{x+1}{x-1},\frac{1-x}{1+x},\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$ $\sqrt{a-x^2},\frac{ax+b}{cx-a}$，其中，$a,b,c\in\mathbf{R},c\neq 0$ 且 $a^2+bc\neq 0$，则 $f(x)$以 2λ 为周期；

(ⅱ) 若 $g(x)=\frac{2x-7}{x+1},\frac{1}{1-x}$，则 $f(x)$以 3λ 为周期；

(ⅲ) 若 $g(x)=\frac{x-1}{x+1},\frac{1+x}{1-x}$，则 $f(x)$以 4λ 为周期；

(ⅳ) 若 $g(x)=\frac{x+1}{2-x}$，则 $f(x)$以 6λ 为周期.

定理 4.2.12 设 λ 为非零常数，若对函数 $f(x)$的定义域中任意 x，有

(ⅰ) $f(x+\lambda)=-f(\lambda-x)$($f(\lambda+x)=f(\lambda-x)$)，且 $f(x)$是奇函数($f(x)$是偶函数)，则 $f(x)$以 2λ 为周期；

(ⅱ) $f(x+\lambda)=f(\lambda-x)$($f(x+\lambda)=-f(\lambda-x)$)，且 $f(x)$是奇函数($f(x)$是偶函数)，则 $f(x)$以 4λ 为周期；

(ⅲ) $f(x+\lambda)=-f(x-\lambda)$，则 $f(x)$以 4λ 为周期.

定理 4.2.13 设 a,b 为非零常数，若对函数 $f(x)$定义域的中任意 x，有

(ⅰ) $f(a+x)=f(a-x)$($f(a+x)=-f(a-x)$)，$f(b+x)=f(b-x)$($f(b+x)=-f(b-x)$)，则 $f(x)$以 $2(b-a)$为周期；

(ⅱ) $f(a+x)=f(a-x)$($f(a+x)=-f(a-x)$),$f(b+x)=-f(b-x)$($f(b+x)=f(b-x)$),则 $f(x)$以 $4(b-a)$为周期.

定理 4.2.12 和定理 4.2.13 只需一个简单的验证即可得到.

下面研究一个具体的周期函数问题.

例 11 已知 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{N}$,且 $\forall x\in\mathbf{N}$,有

$$f(x)=f(x-\lambda)+f(x+\lambda).$$

其中,λ 为非零常数. 求 $f(x)$的一个周期.

解 因为 $\forall x\in\mathbf{N}$,

$$f(x+\lambda)=f(x)+f(x+2\lambda),$$

$$f(x+2\lambda)=f(x+\lambda)+f(x+3\lambda).$$

把上面两式相加,可得 $f(x)=-f(x+3\lambda)$,可验证 $f(x)$满足函数方程(4.2.19). 其中,$g(x)=-x$ 具有迭代周期 2λ. 由定理4.2.11 可知 $f(x)$是以 6λ 为周期的周期函数.

§4.3 进行某些推导和运算

利用函数方程可使一些计算与推导更简洁、更优美. 在本节中我们只叙述几个有趣的例子.

1) 证明 Newton 二项展开定理

定理 4.3.1 对一切实数 α,等式

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots \tag{4.3.1}$$

成立. 其中,$x\in(-1,1)$.

实际上,该定理的证明有多种方法. 下面我们借助于简单函数方程的求解来证明这个定理.

容易求出式(4.3.1)右端的幂级数的收敛半径 $R=1$,故对一

切实数 α 来说，这个级数都在$(-1,1)$内都收敛. 我们记式(4.3.1)右端幂级数的和函数为 $S(\alpha)$(现在我们把和函数看成 α 的函数，而把 x 看成参变量)，即

$$S(\alpha)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots. \tag{4.3.2}$$

显然，对于 $x\in(-1,1)$来说，$S(\alpha)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义且连续. 现在，我们只需证明：$S(\alpha)=(1+x)^\alpha$.

我们注意到，对任意实数 β，当 $x\in(-1,1)$，也有

$$S(\beta)=1+\beta x+\frac{\beta(\beta-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)}{n!}x^n+\cdots. \tag{4.3.3}$$

根据幂级数乘法原理，由式(4.3.2)和(4.3.3)，可得

$$\begin{aligned}S(\alpha)S(\beta)&=1+(\alpha+\beta)x+\frac{(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)-1]}{2!}x^2+\cdots+\\&\quad\frac{(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)-1]\cdots[(\alpha+\beta)-n+1]}{n!}x^n+\cdots\\&=S(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

这就是说，和函数 $S(\alpha)$满足函数方程

$$S(\alpha)S(\beta)=S(\alpha+\beta). \tag{4.3.4}$$

因为当参变量 $x\in(-1,1)$时，$S(\alpha)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，那么由 $f(x+y)=f(x)f(y)$知，函数方程(4.3.4)有唯一非零连续解

$$S(\alpha)=\alpha^\alpha,\quad -\infty<\alpha<+\infty.$$

其中，$\alpha=\alpha(x)$. 这样，函数方程(4.3.4)的唯一非零连续解又可表示为

$$S(\alpha)=[\alpha(x)]^\alpha. \tag{4.3.5}$$

其中，$-\infty<\alpha<+\infty$，$-1<x<1$.

一方面，在式(4.3.5)中令 $\alpha=1$，得到

$$\alpha(x)=S(1); \tag{4.3.6}$$

另一方面，由式(4.3.2)易见

$$S(1)=1+x. \tag{4.3.7}$$

综合式(4.3.5)，(4.3.6)和(4.3.7)，即可证得 $S(\alpha)=(1+x)^{\alpha}$. 二项展开定理证讫.

2) 计算 Euler 积分

为了计算著名的 Euler 积分的值，先来计算定积分

$$f(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)}{x}\mathrm{d}x, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi. \tag{4.3.8}$$

定理 4.3.2 对于由式(4.3.8)定义的函数 f，有

$$f(\alpha)=-\frac{(\alpha-\pi)^2}{2}+\frac{\pi^2}{6}. \tag{4.3.9}$$

证 利用恒等式

$$(x^2-2x\cos\alpha+1)(x^2+2x\cos\alpha+1)=x^4-2x^2\cos 2\alpha+1,$$

可得

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\\ &=\int_0^1\frac{1}{x}\left[\ln\left(x^2-2x\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(x^2+2x\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\right]\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1\frac{1}{x}\ln(x^4-2x^2\cos\alpha+1)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

对上式作替换，令 $x=\sqrt{t}$，则上式变为

$$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{t}\ln(t^2-2t\cos\alpha+1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(\alpha).$$

于是，由式(4.3.8)定义的函数 f 对所有 $\alpha\in[0,2\pi]$ 满足单变量函数方程

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{f(\alpha)}{2}. \tag{4.3.10}$$

根据积分号下的求导法则知，f 是二次可微的. 对式(4.3.10)关于 α 求二次导数，可得到

$$f''\left(\frac{\alpha}{2}\right)+f''\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)=2f''(\alpha). \tag{4.3.11}$$

因 f'' 在 $[0,2\pi]$ 上连续，所以它在 $[0,2\pi]$ 上存在最大值 M 和最小值 m. 设在某个固定点 $\alpha_0\in[0,2\pi]$ 上，有 $f(\alpha_0)=M$. 将 $\alpha=\alpha_0$ 代入式(4.3.11)，可得

$$f''\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)+f''\left(\pi-\frac{\alpha_0}{2}\right)=2f''(\alpha_0)=2M. \tag{4.3.12}$$

又因 $\frac{\alpha_0}{2}\in[0,2\pi]$，$\pi-\frac{\alpha_0}{2}\in[0,2\pi]$，故

$$f''\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\leqslant M,\quad f''\left(\pi-\frac{\alpha_0}{2}\right)\leqslant M. \tag{4.3.13}$$

从而

$$f''\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)+f''\left(\pi-\frac{\alpha_0}{2}\right)\leqslant 2M.$$

由式(4.3.12)和(4.3.13)可知，必有 $f''(\frac{\alpha_0}{2})=M$. 依迭代方法可得

$$f''(\alpha_0)=f''\left(\frac{\alpha_0}{2^n}\right)=M.$$

利用连续性，可推得

$$\lim_{n\to\infty}f''\left(\frac{\alpha_0}{2^n}\right)=f''(0)=M.$$

类似地可证明 $f''(0)=m$，因此 $M=m$，即 f'' 是 $[0,2\pi]$ 上的常函数. 不妨设 $f''(\alpha)=r$，于是 f 就是一个二次多项式

$$f(\alpha)=\frac{r}{2}\alpha^2+s\alpha+t. \tag{4.3.14}$$

欲确定常数 r,s 和 t，可将式(4.3.14)代入(4.3.10)，比较系数得

$$-\frac{\pi r}{2}=\frac{s}{2},\quad \frac{\pi^2 r}{2}+s\pi+2t=\frac{t}{2}. \tag{4.3.15}$$

另外，由式(4.3.8)及积分号下的求导法则，有 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. 由式(4.3.14)可得到

$$\frac{\pi r}{2}+s=\frac{\pi}{2}. \tag{4.3.16}$$

从式(4.3.15)与(4.3.16)可解出 $r=-1, s=\pi, t=-\frac{\pi^2}{3}$. 将此代入式(4.3.14)，就变为式(4.3.9). 至此，定理证讫.

因此，所证得的公式(4.3.9)就是

$$\int_0^1 \frac{\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}-\frac{(\alpha-\pi)^2}{2}. \tag{4.3.17}$$

其中，$\alpha\in[0,2\pi]$.

在式(4.3.17)中分别令 $\alpha=0,\pi,\frac{\pi}{2}$，可计算出下面诸 Euler 积分的值为

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{24}.$$

可以看出，将 Euler 积分归结为某函数方程的求解实在是一个漂亮的结果.

3) 推导 Poisson 分布律

在概率论中，把源源不断出现的随机质点序列称为**随机质点流**(简称为**流**)，如某电话交换台在一段时间内接收到的呼唤流，某商店在一段时间内接待的顾客流，某纺纱机上的断头流，某晶体管上的电子流等. 诸如此类的“流”在客观世界是广泛存在着的. 通

常，把符合下列条件的流称为 Poisson 流：

（ⅰ）在互不相交的时间区间中各自出现的随机质点数是相互独立的（无后效性）.

（ⅱ）在时间区间$[t_0,t_0+t]$内出现 k 个质点的概率与 t_0 无关，而只与 $t>0$ 有关（平稳性）. 据此，可用 $V_k(t)$ 表示在时间长为 t 的区间中出现 k 个质点的概率. 显而易见，应要求 $V_0(t)$ 不恒等于 1.

（ⅲ）在长为 t 的时间区间内，有 $\sum_{k=0}^{\infty}V_k(t)=1$.

（ⅳ）在一个瞬间同时出现两个以上的质点被认为几乎是不可能的，即 $V_k(t)=o(t)(k=2,3,\cdots)$.

我们分以下五步来推导上述 Poisson 流的分布规律：

(1) 求 $V_0(t)$. 由条件（ⅰ），（ⅱ）和独立事件乘法定理知，在$(0,\sigma+t]$内不出现质点的概率等于在$(0,\sigma]$和$(\sigma,\sigma+t]$内不出现质点的概率之积，即

$$V_0(\sigma+t)=V_0(\sigma)V_0(t).$$

由 §2.4 知，该函数方程的非零连续解为 $V_0(t)=a^t$. 其中，$a=V_0(1)$，显然 $0<a<1$，故可取 $\lambda=-\ln a>0$，从而得到

$$V_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{4.3.18}$$

(2) 求 $V_1(t)$. 由（ⅰ）和（ⅱ）知，在$(0,\sigma+t]$内出现一个质点相当于在$(0,\sigma]$出现一个质点，同时在$(\sigma,\sigma+t]$内不出现质点，或在$(0,\sigma]$内不出现质点而在$(\sigma,\sigma+t]$内出现一个质点. 根据互斥事件的加法定理和独立事件的乘法定理，考虑到条件（ⅲ），可得到

$$V_1(\sigma+t)=V_1(\sigma)V_0(t)+V_0(\sigma)V_1(t),$$

再由式(4.3.18)，有

$$V_1(\sigma+t)=V_1(\sigma)\mathrm{e}^{-\lambda t}+V_1(t)\mathrm{e}^{-\lambda\sigma},$$

即

$$V_1(\sigma+t)\mathrm{e}^{\lambda(\sigma+t)}=V_1(\sigma)\mathrm{e}^{\lambda\sigma}+V_1(t)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

当令 $V_1(t)e^{\lambda t}=U_1(t)$ 时，就可得到关于 $U_1(t)$ 的函数方程

$$U_1(\sigma+t)=U_1(\sigma)+U_1(t).$$

由 §2.4 知，该函数方程的连续解为 $U_1(t)=c_1t$.

其中，c_1 是常数，于是

$$V_1(t)=c_1te^{-\lambda t}. \tag{4.3.19}$$

(3) 求 $V_2(t)$. 根据条件(ⅰ)与(ⅱ)及概率的加法定理和乘法定理，同(2)的分析，可得

$$V_2(\sigma+t)=V_2(\sigma)V_0(t)+V_1(\sigma)V_1(t)+V_0(\sigma)V_2(t).$$

由式(4.3.18)和(4.3.19)，可得

$$V_2(\sigma+t)=V_2(\sigma)e^{-\lambda t}+V_2(t)e^{-\lambda\sigma}+c_1^2\sigma te^{-\lambda(t+\sigma)},$$

即

$$V_2(\sigma+t)e^{\lambda(t+\sigma)}-\frac{1}{2}c_1^2(t+\sigma)^2$$

$$=\left[V_2(\sigma)e^{\lambda\sigma}-\frac{1}{2}c_1^2\sigma^2\right]+\left[V_2(t)e^{\lambda t}-\frac{1}{2}c_1^2t^2\right].$$

令 $U_2(t)=V_2(t)e^{\lambda t}-\frac{1}{2}c_1^2t^2$，上式就变为函数方程

$$U_2(\sigma+t)=U_2(\sigma)+U_2(t).$$

根据 §2.4 知，该函数方程连续解为

$$U_2(t)=c_2t.$$

其中，c_2 为常数，于是

$$V_2(t)=e^{-\lambda t}\left[\frac{1}{2}(c_1t)^2+c_2t\right].$$

再依条件(ⅳ)，从上式可得

$$\lim_{t\to0}\frac{V_2(t)}{t}=\lim_{t\to0}e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{2}c_1^2t+c_2\right)=c_2=0,$$

故有

$$V_2(t)=e^{-\lambda t}\frac{(c_1t)^2}{2!}.$$

(4) 用数学归纳法可以证明:一般地,有

$$V_k(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(c_1t)^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots. \tag{4.3.20}$$

(5) 确定常数 c_1. 利用条件(ⅲ),有

$$\sum_{k=0}^{\infty}V_k(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(c_1t)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{c_1t}=1,$$

因此,$c_1=\lambda$. 将此代入式(4.3.20),就可得到著名的 Poisson **分布律**

$$V_k(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots. \tag{4.3.21}$$

其中,$\lambda=-\ln V_0(1)$.

4) 求零点

一个函数 F 的**零点** x_0 是指 x_0 满足 $F(x_0)=0$. 因此,求零点实质上也是求根问题. 关于函数方程,我们常常会遇到求未知函数的零点或与未知函数有关的函数零点的问题. 如果能够求出函数方程的解,那么零点问题就变得很简单了.

例 1 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,若 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $f^{2k+1}(x)=x$. 其中,$k\in\mathbf{N}$. 求 $f(x)=2$ 的根.

解 首先证明 $f(x)$ 是严格单调的. 若不然,一定存在 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,$x_1<x_2$,有 $f(x_1)=f(x_2)$. 从而 $x_1=f^{2k+1}(x_1)=f^{2k}[f(x_1)]=f^{2k}[f(x_2)]=f^{2k+1}(x_2)=x_2$,这与 $x_1<x_2$ 矛盾.

当 $f(x)$ 严格递增时,$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)=x$. 否则,$\exists x_0\in\mathbf{R}$,使 $f(x_0)>x_0$(或 $f(x_0)<x_0$). 不妨考虑 $f(x_0)>x_0$ 的情形. 显然,

$$x_0=f^{2k+1}(x_0)>f^{2k}(x_0)>\cdots>f(x_0)>x_0,$$

从而导致矛盾.

由于 $2k+1$ 为奇数,且 $f^{2k+1}(x)=x$ 严格递增,所以 $f(x)$ 不可能严格递减.

综合上述,$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)=x$. 从而 $f(x)=2$ 的根只有 $x=2$.

许多零点问题是不需要事先求解函数方程的.

例 2 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x+1)=f^2(x)+1$. 证明 $f(x)=x+1$ 无实根.

证 用反证法. 设存在一个 $x_0\in\mathbf{R}$, 有 $f(x_0)=x_0+1$, 则

$$f(x_0+1)=f^2(x_0)+1=f(x_0+1)+1,$$

即 $0=1$, 矛盾. 因此, $f(x)=x+1$ 无实根.

例 3 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 且连续, $\forall x,y\in\mathbf{R}$, 有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy, \tag{4.3.22}$$

若 $f(-1)f(1)\geqslant 4$, 求 $f(x)=0$ 的整数根.

用递归法可求出满足式(4.3.22)的一个连续解 $f(x)=2x^2$. 该函数显然只有 $x=0$ 是整数零点. 下面的做法无需解出方程(4.3.22), 同时用不等式技巧还将证明方程的所有解都只有 $x=0$ 这一个整数零点.

解 从式(4.3.22)中取 $x=y=0$, 得 $f(0)=0$. 在式(4.3.22)中取 $x=1, y=-1$, 得 $f(1)+f(-1)=4$. 因为 $f(1)f(-1)\geqslant 4$, 所以 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 为正数且

$$4=f(1)+f(-1)\geqslant 2\sqrt{f(1)f(-1)}\geqslant 4,$$

从而 $f(1)=f(-1)=2$. 这样, 从式(4.3.22)得出

$$f(x+1)=f(x)+4x+2,\quad x\in\mathbf{R}. \tag{4.3.23}$$

由于我们要求的是 $f(x)=0$ 的整数根, 故对 $x\in\mathbf{Z}$ 讨论式(4.3.23). 由于 $f(1)=2$, 从式(4.3.23)可归纳地证明

$$f(x)>0,\quad x=1,2,3,\cdots, \tag{4.3.24}$$

从而

$$f(x+1)>x+1,\quad x=1,2,3,\cdots,$$

亦即对一切正整数 x, 有 $f(x)>x>0$.

另一方面, 对任意负整数 x, 由式(4.3.23)可知

$$f(x)-f(x+1)=-(4x+2)>0. \tag{4.3.25}$$

于是

$$f(-1)-f(0)>0,$$
$$f(-2)-f(-1)>0,$$
$$\cdots$$
$$f(x)-f(x+1)>0,$$

相加可得 $f(x)-f(0)>0$，即 $f(x)>f(0)=0$

综上所述，$f(x)=0$ 的整数根只有 $x=0$.

5）证明不等式

例 4 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是单调递增的且 $\forall x\in\mathbf{R}$，

$$f(x+k)=f(x)+k. \tag{4.3.26}$$

其中，k 为正常数. 证明 $|f^n(x)-x|\leqslant|f^n(0)|+k$.

证 由式(4.3.26)，有

$$f^2(x+k)=f[f(x)+k]=f^2(x)+k,$$
$$\cdots$$
$$f^n(x+k)=f^n(x)+k,$$

即

$$f^n(x+k)-(x+k)=f^n(x)-x,$$

即 $f^n(x)-x$ 是以 k 为周期的函数.

任取 $0\leqslant x\leqslant k$，因为 $f(x)$ 单调递增，所以

$$f^n(0)\leqslant f^n(x)\leqslant f^n(k)=f^n(0)+k,\quad x\in[0,k],$$

即

$$f^n(0)-k\leqslant f^n(x)-x\leqslant f^n(0)+k,\quad x\in[0,k],$$

故 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有，

$$f^n(0)-k\leqslant f^n(x)-x\leqslant f^n(0)+k,$$

即

$$|f^n(x)-x|\leqslant|f^n(0)|+k.$$

例 5 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是单调递增的且 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+k)=f(x)+b. \tag{4.3.27}$$

其中，$k\neq b$，且 k,b 为正常数. 证明 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，有

$$|f^n(x)-f^n(y)|\leqslant 2\frac{a^n-1}{a-1}b+a^n|x-y|.$$

其中，$a=\dfrac{b}{k}$.

证 令 $f(x)=\dfrac{b}{k}\varphi(x)=a\varphi(x)$，则由式(4.3.27)有

$$\varphi(x+k)=\varphi(x)+k.$$

同例 4 可得

$$\varphi(0)-k+x\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(0)+k+x,\quad x\in\mathbf{R},$$

即

$$f(0)-b+ax\leqslant f(x)\leqslant f(0)+b+ax,\quad x\in\mathbf{R}.$$

因而

$$\begin{aligned}f(0)-b+a[f(0)-b]+a^2x&\leqslant f^2(x)\\&\leqslant f(0)+b+a[f(0)+b]+a^2x,\end{aligned}$$

即

$$\frac{a^2-1}{a-1}[f(0)-b]+a^2x\leqslant f^2(x)\leqslant\frac{a^2-1}{a-1}[f(0)+b]+a^2x,$$

$$\cdots$$

$$\frac{a^n-1}{a-1}[f(0)-b]+a^nx\leqslant f^n(x)\leqslant\frac{a^n-1}{a-1}[f(0)+b]+a^nx.$$

用 y 代替 x，可得

$$\frac{a^n-1}{a-1}[f(0)-b]+a^ny\leqslant f^n(y)\leqslant\frac{a^n-1}{a-1}[f(0)+b]+a^ny.$$

于是，

$$-2\frac{a^n-1}{a-1}b+a^n(x-y)\leqslant f^n(x)-f^n(y)\leqslant 2\frac{a^n-1}{a-1}b+a^n(x-y).$$

故

$$|f^n(x)-f^n(y)|\leqslant 2\frac{a^n-1}{a-1}b+a^n|x-y|.$$

§4.4 更多方面的应用

前几节所述函数方程的应用只是一些初等的、局部的应用，其实函数方程的应用还有更广泛的领域.

1）应用于微分方程、算子方程

自从 Hille 的书问世以来，算子函数方程理论处于极盛时期，有的结果已在流体力学中应用. 在偏微分方程方面，一个关于双曲型方程 $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}=G(x,y)$ 的所谓 Goursat 问题可归结为函数方程

$$\varphi[f(x)]-\varphi(x)=F(x)$$

的求解. 20 世纪 70 年代末，华罗庚等利用形如

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{l} a_i\varphi(\alpha_i x)+h(x) \tag{4.4.1}$$

的线性函数方程研究了二阶两个自变量、两个未知函数线性偏微分方程的唯一可解性，并获得了成功.

2）应用于概率论

函数方程在概率度量空间和概率分布方面的应用是很有效的，在随机过程方面的应用更深刻. 分支过程是当集团的个体互相独立生灭时表现集团状态的一种随机过程. Galton-Watson 分支过程中的一种矩量母函数 $\varphi(s)$ 就满足函数方程

$$1-\varphi[f(s)]=m[1-\varphi(s)] \quad (m\leqslant 1)$$

或 Poincaré 方程

$$\varphi(ms)=f[\varphi(s)] \quad (m>1).$$

在研究一种人口模型时，也涉及前一个方程.

3）应用于数学规划

动态规划是由 R. Bellman 在 20 世纪 50 年代创立的一种方

法，其特点是始终利用最优化原理. 一种常用的方法是由最优化原理导出递推关系，建立关于未知函数组的函数方程，此法常称为函数方程法. 在动态规划中，不仅要考虑解的存在唯一性问题，而且要寻求方程的特殊解法. 动态规划理论开辟了函数方程应用的新领域.

4) 应用于信息论

在由 C. E. Shannon 开创的信息论中信息量是用熵(entropy)进行计算的. Shannon 等利用函数方程讨论了有关熵的一系列重要性质. 近年来，以 Aczel 为首的加拿大 Waterloo 大学信息论中心的数学家们应用函数方程理论研究信息测度、信息混合论等取得了许多重要的成果.

5) 应用于动力系统

动力系统是描述决定性系统的数学分支，它最早起源于用微分方程(组)描述质点(组)运动的规律. 后来，人们发现用迭代描述动力系统更简明，于是迭代问题越来越引起数学家们的兴趣. 迭代问题中有关迭代根的确定和连续自映射的嵌入问题，都与经典的 Babbage 方程、Abel 方程和 Schröder 方程密切相关. 讨论流形上变换 F 所生成的迭代群的性质经常用到的 Hartman 线性化定理是在高维情况下 Schröder 方程连续解的存在性定理. 另外，对迭代的研究还有一个重要发现：完全确定的迭代过程有时会呈现由偶然性占统治地位的随机系统的特征，这便是混沌(chaos)现象. 混沌理论已成为动力系统研究的一个重要方向，人们期待着它的发展有利于揭示湍流、地震、脑神经和心脏的病理等非线性问题的秘密. M. J. Feigenbaum 在出现混沌的单峰映射中得到一个普适函数满足的方程(重整化群方程或 Feigenbam 方程)：

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda}\varphi[\varphi(-\lambda x)], \tag{4.4.2}$$

$\lambda \in (0,1)$，$\varphi(0) = 1$，$\varphi(x) \in [-1,1]$，$x \in [-1,1]$.

关于方程(4.4.2)的解的存在和性态的研究受到了数学、物理等领域的工作者的普遍关注.

6) 应用于 fractal 几何

传统几何研究的是非常规则的图形. 自从 B. B. Mandelbrot 创立 fractal 几何以来,普遍存在的极不规则图形才被深入研究,并获得了许多理论和应用成果. 确定性 fractal 集可由迭代构成,有的也可由简单的函数方程的解给出. 例如,设 F 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续有界,则线性函数方程

$$\varphi(x)=b\varphi(ax)+F(x),\quad 0<b<1,0<a\neq 1$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续解 $\varphi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b^kF(a^kx)$. 若 $F(x)=\left|x-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right|$, $b=a^{-1}$, a 为偶数,则 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无处可微;当 $F(x)=\cos x$, a 为奇数, $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ 时, $\varphi(x)$ 便是著名的 Weierstrass 函数.

此外,函数方程理论还在数论、泛函分析、理论物理、空气动力学、化学工程、集函数论、群论、均值理论、模糊集理论、图论、量子场论、经济与决策以及美学等领域中起着重要的作用.

参考文献

[1] Kuczma M. Functional Equations in a Single Variable. Monografie Matematyczne 46. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishing, 1968.

[2] Aczel J, Dhombres J. Functional Equations in Several Variables. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[3] Kuczma M, Choczewski B, Ger R. Iterative Functional Equations. Encycl Math Appl 32. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[4] 张景中，杨路，张伟年. 迭代方程与嵌入法. 上海：上海科学技术出版社，1998.

[5] 张伟年，杨地莲，邓圣福. 函数方程. 成都：四川教育出版社，2002.

[6] 李文荣. 分析中的问题研究. 北京：中国工人出版社，2001.

[7] 李文荣，司建国. 单变量函数方程的理论、应用和发展. 曲阜师范大学学报(自然科学版)，1995，21(1)：34～44.

[8] 司建国. 迭代方程解析理论的研究. 成都：四川大学，2003.

[9] 王向东，李文荣. 函数方程、函数迭代与数学竞赛. 北京：首都师范大学出版社，1994.

[10] Li Wenrong, Liu Hanze, Yin Li. Analytic Invariant Curves for a Planar Mapping. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2008.